

Estimación del factor de frecuencia K_T para la función de distribución de probabilidad gamma incompleta



<https://cu-id.com/2377/v31n2e04>

Frequency factor K_T estimation for the incomplete gamma probability distribution

 Lorenzo Armando Aceves Navarro¹,  Benigno Rivera Hernández^{2*},
 José Francisco Juárez López¹,  Agrícola Arrieta Rivera³

¹Colegio de Postgraduados - Campus Tabasco. Área de Ciencia Ambiental, Cuba.

²Universidad Popular de la Chontalpa. Área de Ciencias Agrícolas. México

³Tecnológico Nacional de México/Zona Olmeca. Agrícola. México

RESUMEN: En este estudio se presenta un procedimiento para obtener el valor del factor de frecuencia de la Función de Distribución de Probabilidad Gamma Incompleta. a partir de los valores de los parámetros de forma (α) y escala (β). Mediante análisis de regresión se compararon las precipitaciones resultantes de aplicar el modelo de la variable reducida, con los obtenidos con la Función de Distribución de Probabilidad Gamma Incompleta. Se utilizaron datos de 53 años de precipitación total mensual de la estación meteorológica 27039 Samaria, Cunduacán, Tabasco; para ajustar y calibrar los valores del factor de frecuencia. Asimismo, se seleccionaron los valores de precipitación total mensual de cinco estaciones meteorológicas de varias regiones con agricultura de temporal de México, con registros que variaron de 31 a 59 años. Las estaciones meteorológicas de Motul de Felipe Carrillo Puerto, Yucatán; Texcoco, estado de México; Suchiate, Chiapas; Zapopan, Jalisco y Acajoneta, Nayarit, se utilizaron para validar los valores resultantes del factor de frecuencia. El coeficiente de correlación de Pearson en el proceso de ajuste, calibración y validación, fue superior a 0.997. Así, los valores resultantes del factor de frecuencia tuvieron muy buen ajuste y son confiables para calcular la probabilidad de excedencia de la precipitación total mensual para una Función de Distribución de Probabilidad Gamma Incompleta.

Palabras clave: factor de frecuencia, modelo de la variable reducida, probabilidad de excedencia.

ABSTRACT: In the present paper, a procedure is presented to obtain the value of the frequency factor for the Incomplete Gamma Probability Distribution Function from their shape (α) and scale (β) parameters. Using regression analysis, the rainfall data resulting from applying the model of the reduced variable were compared with those obtained with the Incomplete Gamma Function. Data from 53 years of total monthly rainfall from the meteorological station 27039 Samaria, Cunduacán, Tabasco were used to adjust and calibrate the values of the frequency factor K_T . Likewise, the values of total monthly rainfall from five meteorological stations from various rainfed regions of Mexico were selected, with records ranging from 31 to 59 years. Data from the meteorological stations of Motul de Felipe Carrillo Puerto, Yucatán; Texcoco, State of Mexico; Suchiate, Chiapas; Zapopan, Jalisco; and Acajoneta, Nayarit to validate the resulting values of the K_T frequency factor. The Pearson correlation coefficient in the adjustment, calibration, and validation processes was higher than 0.997. Thus, the resulting K_T values had a very good fit and are reliable for calculating the probability of exceeding the total monthly rainfall for an Incomplete Gamma Function.

Keywords: frequency factor, reduced variable model, exceedance probability.

INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades aplicado a la precipitación es una práctica común en el área de la ingeniería hidrológica (Evin *et al.*, 2011), en el manejo de los recursos naturales y en la agricultura (Hargreaves & Jensen, 2002). Este cálculo es útil para el pronóstico de la precipitación (Sharma & Singh,

2010), el diseño de pequeñas obras hidráulicas con fines de conservación de suelos y aguas (Nkegbe & Shankar, 2014), y en la determinación del inicio del periodo de siembra en áreas de temporal (Laux *et al.*, 2009). También se puede emplear en: el cálculo de la precipitación efectiva y/o confiable y el índice de disponibilidad de humedad (Jadhav *et al.*, 2015), la caracterización de las sequías (Husak *et al.*, 2007),

*Autor de correspondencia: Benigno Rivera Hernández. E-mail: benigno.rivera@upch.mx

Recibido: 23/01/2025

Aceptado: 09/04/2025

Este artículo se encuentra bajo licencia [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional \(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

la realización de balances hidrológicos confiables (Bokke & Shoro, 2020), las estrategias para la planeación de cultivos y su sustentabilidad (Sahu et al., 2022), la planeación del riego (Vergni et al., 2020), la estimación del potencial productivo de una localidad y/o región, así como la estimación del rendimiento relativo de cultivos de temporal (Jadhav et al., 2015).

El cálculo de la probabilidad de lluvia a un nivel deseado, implica cierto conocimiento de las funciones de distribución de probabilidad de variables continuas y requieren del manejo de cientos de datos de precipitación. El uso de estas funciones de probabilidad no resulta de gran complejidad, pero pocos estudiantes de las ciencias biológicas y agropecuarias están familiarizados con el mismo. Así, el objetivo del presente trabajo fue desarrollar un método sencillo de dicho cálculo, mediante el uso del modelo de la variable reducida propuesto por Chow (1951), que solo requiere de datos de la media y desviación estándar de la precipitación mensual y de un factor de frecuencia desconocido (K_T) específico para una función de distribución de probabilidad (FDP) en particular.

La precipitación como fenómeno atmosférico es una variable discreta, en cambio, los valores que puede tomar la precipitación es una variable continua. Existen funciones de probabilidad específicas para variables discretas y continuas. Las funciones probabilísticas de variables continuas por su distribución de frecuencias, pueden ser simétricas o asimétricas. Un ejemplo de la función de probabilidad aplicable a variables simétricas es la función de distribución de probabilidades Normal.

Existen funciones probabilísticas aplicables a variables continuas con distribución asimétrica, como son la Gamma Incompleta (Gamma de 2 parámetros), la Galton, la Erlang, la Chi-Cuadrada, la Exponencial, las Transformadas de la Normal (Log-Normal, Raíz Cúbica, Raíz Cuarta, etc.), entre otras. La precipitación puede distribuirse de manera simétrica o asimétrica en función del periodo de tiempo por analizar. Así, valores de precipitación total anual se distribuyen de manera general, como una distribución simétrica (Normal); mientras que valores de la precipitación para periodos de un mes o menores,

(quincena, decena, semana o pentada) generalmente se distribuyen de manera asimétrica y con sesgo positivo.

La FDP Gamma Incompleta (Gamma de 2 parámetros), es ampliamente usada para calcular probabilidades de precipitación, porque puede tomar variadas formas dependiendo del valor del parámetro de forma alfa (α) y escala beta (β) (Machado-Fernández, 2016).

La Distribución Normal es una función simétrica donde el valor de 'Z' para una probabilidad deseada, es el mismo para todos los meses del año. No así, en el caso de una distribución asimétrica como la Gamma Incompleta, donde el valor de K_T es diferente para cada mes y para cada probabilidad de excedencia deseada. Por tales motivos, la presente investigación tiene como objetivo estimar los valores del factor de frecuencia K_T para para cualquier probabilidad de excedencia de la Función de Distribución de Probabilidad (FDP) Gamma Incompleta.

MATERIALES Y MÉTODOS

Selección de las estaciones meteorológicas

Se seleccionaron del programa ERIC III v.2. publicado por el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA, 2009), los valores de precipitación total mensual de seis estaciones meteorológicas de varias regiones de México, con registros que variaron de 31 a 59 años (Tabla 1). Las estaciones seleccionadas están enclavadas en áreas con agricultura de temporal de ambos litorales y del centro de la República Mexicana; con altitudes desde 7 a 2,216 msnm; latitudes desde 14.7714° a 22.500°; y Longitudes desde -89.284° a -105.367° y con precipitaciones totales anuales entre 563.0 a 1889.4 mm.

La base teórica de la FDP Gamma Incompleta y sus parámetros se reproducen en las siguientes líneas, con el único propósito de establecer el procedimiento utilizado en este estudio. La Función de Densidad de la Gamma Incompleta se muestra en la siguiente ecuación (1) y su representación gráfica se reporta en Wilks, (2006).

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (1)$$

Tabla 1. Información sobre las estaciones meteorológicas seleccionadas

Número de la estación	Nombre	Municipio	Estado	Latitud (Grados)	Longitud (Grados)	Altitud (msnm)	Años de registro	Precipitación total anual (mm)
27039	Samaria	Cunduacán	Tabasco	17.996	-93.275	19	53	1889.4
31020	Motul de Felipe Carrillo Puerto	Motul	Yucatán	21.079	-89.284	7	45	1080.8
15125	Texcoco	Texcoco	México	19.517	-98.883	2216	31	563.0
7163	Suchiate	Suchiate	Chiapas	14.714	-92.149	18	35	1573.6
14169	Zapopan	Zapopan	Jalisco	20.717	-103.367	1575	48	967.4
18001	Acaponeta	Acaponeta	Nayarit	22.500	-105.367	31	59	1318.9

Esta ecuación es válida para variables continuas, con valores iguales o mayores a cero, como son los valores de la precipitación.

La FDP Gamma Incompleta o Gamma de dos parámetros, muestra una gran capacidad para representar varias formas de diferentes distribuciones de probabilidad en función de los valores de sus parámetros de forma, alfa (α) y escala, beta (β). Así, cuando el valor ' α ' toma valores iguales o menores a 1.0 se aproxima a la FDP Exponencial. En cambio, cuando el parámetro de forma ' α ' se incrementa por encima de 50, la distribución tiende a desplazarse hacia la derecha y se aproxima a la FDP Normal (Arroyo *et al.*, 2014 y Wilks, 2006).

En el presente estudio, se utilizará la FDP Gamma Incompleta para calcular las probabilidades de excedencia de las precipitaciones mensuales, por las capacidades de representación de dicha FDP antes mencionadas.

El valor de cualquier precipitación en particular (X_i), se puede representar como la suma del valor de la media (μ), más la desviación respecto a la media (Δ_{XT}):

$$X_i = \mu + \Delta_{XT} \quad (2)$$

Dónde:

$$\Delta_{XT} = \sigma * K_T \quad (3)$$

Dónde, ' σ ' es la desviación estándar (mm) y K_T es un factor de frecuencia correspondiente a un periodo de retorno y/o probabilidad de excedencia que tiene esa precipitación. Resultando:

$$X_i = \mu + (K_T * \sigma) \quad (4)$$

Para muestras se puede aproximar a:

$$X_T = P_N + (K_T * s) \quad (5)$$

Esta es la ecuación de la variable reducida que se utiliza para calcular la precipitación a un nivel de probabilidad de excedencia deseado; dónde, X_T es la precipitación total mensual a un cierto periodo de retorno y/o probabilidad de excedencia (mm); P_N es el valor promedio de la precipitación de un conjunto de datos; K_T es el factor de frecuencia y ' s ' es su correspondiente desviación estándar.

En esta ecuación (5), la única incógnita es el valor de K_T , cuyo valor depende del periodo de retorno y/o probabilidad de excedencia del valor de ' X_T ' (Chow, 1951).

Es importante señalar que, los valores de K_T que se estimen, son aplicables para las FDP's Gamma Incompleta y Log-Gamma de 2 parámetros.

Para encontrar el valor correspondiente del factor de frecuencia K_T para cada valor de la probabilidad selecta de la FDP Gamma Incompleta, en el presente estudio se desarrolló un procedimiento a partir de los valores del parámetro de forma ' α ' y del parámetro de escala ' β ' de la FDP Gamma Incompleta.

Para otras FDP's, asimétricas como la Gumbel o la Log-Pearson III (Log-Gamma de tres parámetros), se aplica el mismo modelo de la ecuación (5). Solo cambia la manera de obtener el valor del factor de frecuencia K_T , para lo cual existe reportado en la literatura científica modelos que permiten estimar su cálculo, a partir de los valores de ' Z ' y del coeficiente de asimetría (γ) (Kite, 1977).

Probabilidades de excedencia

Para el cálculo de las probabilidades de excedencia con la FDP Gamma Incompleta, se utilizaron registros mensuales completos de al menos 30 años. Al conjunto de valores de precipitación de un mes en particular, se le determinó las probabilidades de excedencia del 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90%. Se seleccionó la estación meteorológica 27039 de Samaria, Cunduacán, Tabasco, para realizar la calibración y ajuste de los valores de K_T de la ecuación (5), debido a que cuenta con un historial de medición de precipitación ininterrumpido y porque es la más representativas del estado. El resto de las cinco estaciones, se utilizaron para la validar los valores de K_T al utilizar dicho modelo en localidades con agricultura de temporal con diferentes climas, para constatar que el procedimiento propuesto puede ser utilizado en otras zonas de México.

Procedimiento para obtener el factor de frecuencia K_T

La FDP Gamma Incompleta o Gamma de dos parámetros (' α ' y ' β '), se utilizó porque la precipitación total mensual fundamentalmente tiene una distribución asimétrica con sesgo positivo y la FDP Gamma Incompleta es perfecta para representar esos datos (Wilks, 2006). Para la determinación de los parámetros ' α ' y ' β ', se recomienda el método de máxima verosimilitud, mismo que se muestra en las ecuaciones (6, 7 y 8) reportadas Wilks (2006) y por Arroyo *et al.* (2014).

$$D = \ln(X_m) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i) \quad (6)$$

Dónde; D es la diferencia entre el logaritmo natural de la media aritmética (X_m) y la media de los logaritmos de las observaciones de la precipitación; (X_i). El valor de ' α ' se calcula con la ecuación (7).

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4D}{3}}}{4D} \quad (7)$$

Dónde 'α' es el parámetro de forma y 'β' es el parámetro de escala, que se calcula con la ecuación (8).

$$\beta = \frac{X_m}{\alpha} \quad (8)$$

A partir de la ecuación (5), se despeja el factor K_T y se obtiene la ecuación (9) siguiente:

$$K_T = \frac{(X_T - P_N)}{s} \quad (9)$$

Estimación del factor de frecuencia K_T para la FDP Gamma Incompleta

Para obtener el valor del factor K_T en función de los parámetros de la FDP Gamma Incompleta para cualquier probabilidad de excedencia, primero se calculan los parámetros de forma 'α' y de escala 'β', con las ecuaciones (10), (11) y (12). Para ello, es conveniente recordar que la esperanza matemática o media [E(x)] de la FDP Gamma Incompleta de acuerdo con Arroyo *et al.* (2014) y Wilks (2006) se representa por la siguiente ecuación (10):

$$E(X) = P_N = \alpha * \beta \quad (10)$$

Dónde, P_N es la precipitación promedio o normal climatológica. P_N se puede despejar de la ecuación (14) y se obtiene la ecuación (11) siguiente:

$$P_N = \alpha * \beta \quad (11)$$

La varianza de la FDP Gamma Incompleta [Var(x)], la reportan Arroyo *et al.* (2014); y Johnson *et al.* (2018), como se muestra en la ecuación (12):

$$s^2 = \alpha * \beta^2 \quad (12)$$

Así, la desviación estándar 's' será:

$$s = \sqrt{\alpha * \beta^2} \quad (13)$$

Sustituyendo en la ecuación (13) los equivalentes de P_N de la ecuación (11) y 's' de la ecuación (13), ésta se transforma en la ecuación (14) siguiente:

$$K_T = \frac{[X_T - (\alpha * \beta)]}{\sqrt{\alpha * \beta^2}} \quad (14)$$

De esta manera, el factor de frecuencia K_T queda en función de la precipitación con la probabilidad deseada (X_T) y los parámetros 'α' y 'β' de la FDP

Gamma Incompleta. Posteriormente, este valor se introduce en la ecuación (5) para calcular aquella precipitación con cierto nivel de probabilidad de excedencia deseado (X_T).

Cálculo de la precipitación a una determinada probabilidad de excedencia (X_T)

Para estimar el valor de K_T de la ecuación (14), se calculó el valor de X_T para una determinada probabilidad de excedencia, utilizando el comando de Excel Microsoft®. DISTR.GAMMA.INV (probabilidad, alfa, beta). Como Excel Microsoft® calcula automáticamente la probabilidad de No-excedencia, para obtener la probabilidad de excedencia se partió de la siguiente igualdad: Probabilidad de excedencia = 1 - probabilidad de no-excedencia. El valor de X_T resultante fue introducido en la ecuación (14) para obtener el valor de K_T para cada uno de los meses del año. A diferencia de una distribución simétrica, aquí los valores K_T son diferentes para cada uno de los 12 meses y para una probabilidad escogida.

Para obtener un solo valor de K_T para todo el año, se calculó la mediana de esos 12 valores, por ser una mejor representación de la tendencia central, en comparación con la media aritmética, ya que la FDP Gamma Incompleta se distribuye asimétricamente. De esta manera, a cada probabilidad de excedencia se le asoció un único valor de K_T . Así, el valor único del factor K_T resultante para una probabilidad de excedencia escogida, se introdujo en la ecuación (5) para calcular el valor de la precipitación mensual correspondiente (X_T) a esa probabilidad de excedencia, conocidos su media (P_N) y desviación estándar mensual (s).

Cálculo de la precipitación a una cierta probabilidad de excedencia

En el presente trabajo se calcularon los valores del factor K_T para diferentes probabilidades de excedencia a intervalos de 0.05. Acto seguido, se procedió a realizar una regresión polinómica entre los valores de la probabilidad de excedencia y el valor correspondiente del factor de frecuencia K_T . La ecuación de regresión resultante permite calcular el factor K_T a cualquier valor de probabilidad de excedencia deseado. Además, esto permitió elaborar una tabla donde se asocia el valor de K_T a una determinada probabilidad de excedencia, a intervalos de 0.05 de probabilidad; misma que se presenta en los resultados de este estudio.

Comparación entre valores estimados y observados de la precipitación

Al aplicar el modelo de la ecuación (5) se obtuvieron los valores correspondientes de

precipitación para las diferentes probabilidades de excedencia. Estos valores de precipitación estimados con este primer procedimiento, se compararon mediante un análisis de regresión lineal simple, con los valores obtenidos de la FDP Gamma Incompleta, utilizando el comando de Excel Microsoft® anterior, para determinar qué tan bueno fue el ajuste al utilizar los valores resultantes de K_T .

Calibración, ajuste y validación de los valores de K_T

Para calibrar los valores de K_T , se utilizaron datos de precipitación total mensual de 52 años de registro, de la estación meteorológica 27039 de Samaria, Cunduacán, Tabasco, México. Para validar los diferentes valores del factor K_T para sus correspondientes probabilidades de excedencia, se utilizaron datos de precipitación mensual de las cinco estaciones meteorológicas restante de la [Tabla 1](#).

Representación de los resultados

A las precipitaciones resultantes para las diferentes probabilidades de excedencia obtenidas con el modelo de la variable reducida y con la FDP Gamma Incompleta, se les realizó un análisis de regresión simple entre ambos datos resultantes. Posteriormente, se elaboraron las gráficas de la distribución temporal de ambas precipitaciones a una determinada probabilidad y las gráficas del análisis de regresión con su correspondiente coeficiente de determinación. También se elaboraron las tablas correspondientes que muestran las ecuaciones de regresión, sus coeficientes de determinación (R^2) y la raíz del cuadrado medio del error (RMSE), para cada una de las 6 estaciones selectas.

Índice estadístico para evaluar el desempeño o bondad de ajuste de los modelos

Después del ajuste del modelo se evaluó su desempeño, comparando los valores predichos con el modelo con los datos observados. Para determinar qué tan preciso es el modelo de regresión obtenido para predecir un valor con los modelos de regresión obtenidos, se utilizó el estadístico raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés), que evalúa la relación entre los valores resultantes de la Distribución Gamma Incompleta, con los valores estimados por el modelo propuesto; cuya ecuación la reporta [Stöckle et al. \(2004\)](#).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (O_i - E_i)^2} \quad (15)$$

Dónde, RMSE es la raíz cuadrada del error cuadrático medio (mm); \sum es el símbolo de sumatoria; N es el número de observaciones; O_i son los valores observados de precipitación (mm); y E_i son los valores estimados de precipitación.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La [Tabla 2](#), muestra los valores correspondientes del factor K_T para la FDP Gamma Incompleta, para intervalos de 0.05 (5%) de probabilidad de excedencia. Se puede apreciar en la [Tabla 2](#), que al comparar los valores de la precipitación obtenidos con el modelo de la variable reducida ([ecuación 5](#)) y los obtenidos con la FDP Gamma Incompleta tuvieron un muy buen ajuste con coeficientes de determinación superiores a 0.985 y un valor del RMSE inferior a 5.5 mm en el mes.

Por lo tanto, conocida la media y la desviación estándar de la precipitación total de un mes en particular, se selecciona el valor de K_T de la [Tabla 2](#), correspondiente a la probabilidad deseada y se calcula la precipitación con la probabilidad de excedencia escogida, utilizando la [ecuación \(5\)](#).

Cuando la probabilidad deseada sea diferente a las mostradas en la [Tabla 2](#), se puede obtener el valor del factor K_T utilizando la ecuación de regresión siguiente con un R^2 de 1.0.

$$K_T = 2.3315 - 12.724 * P_e + 33.067 * P_e^2 - 54.771 * P_e^3 + 46.961 * P_e^4 - 16.33 * P_e^5 \quad (16)$$

Dónde, P_e es la probabilidad de excedencia deseada.

La [Figura 1](#), muestra la relación entre la probabilidad de excedencia (P_e) y los valores de K_T para la FDP Gamma Incompleta.

Calibración y ajuste a la FDP Gamma Incompleta

En la [Tabla 3](#), se muestra los valores mensuales de la precipitación calculada con el modelo propuesto y la FDP Gamma Incompleta, para una probabilidad de excedencia de 0.10 (10%), para el área de influencia de la estación meteorológica 27039 de Samaria, Cunduacán, Tabasco, México. Utilizada para realizar la calibración y ajuste del modelo propuesto. Asimismo, en la tabla se muestra el modelo propuesto para calcular la precipitación con una probabilidad de excedencia de 0.10 con un valor del factor K_T de 1.3400.

La [Figura 2](#), muestra de manera gráfica los resultados del comportamiento temporal de los valores de la precipitación obtenidos por ambos procedimientos para una probabilidad de excedencia de 0.10. Puede apreciarse que los resultados con ambas metodologías son muy similares a este nivel

Tabla 2. Valores del factor K_T para diferentes valores de probabilidad de excedencia, para la FDP Gamma Incompleta y los valores resultantes del coeficiente de determinación (R^2) y la raíz del error cuadrático medio (RMSE), aplicados a la estación meteorológica de Samaria, Cunduacán, Tabasco, México

Probabilidad de excedencia	Valor del Factor ' K_T '	R^2	RMCE (mm)
0.05	1.9025	0.9994	4.0
0.10	1.3400	0.9999	1.3
0.15	0.9948	0.9993	3.4
0.20	0.7386	0.9985	4.5
0.25	0.5316	0.9979	5.1
0.30	0.3556	0.9974	5.4
0.35	0.2008	0.9971	5.4
0.40	0.0611	0.9970	5.2
0.45	-0.0675	0.9971	4.8
0.50	-0.1879	0.9974	4.3
0.55	-0.3023	0.9979	3.7
0.60	-0.4125	0.9986	2.9
0.65	-0.5202	0.9993	1.9
0.70	-0.6270	0.9999	0.9
0.75	-0.7328	0.9998	0.8
0.80	-0.8458	0.9982	2.4
0.85	-0.9639	0.9933	4.2
0.90	-1.0960	0.9932	4.0
0.95	-1.2604	0.9858	5.4

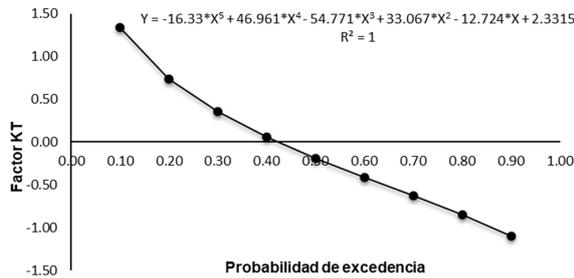


Figura 1. Valores del factor de frecuencia ' K_T ' para diferentes probabilidades de excedencia de la precipitación total mensual para la FDP Gamma Incompleta

de probabilidad y que el modelo propuesto da iguales resultados que la FDP Gamma incompleta.

Los resultados del análisis de regresión entre los valores de precipitación calculados con el modelo propuesto y la función acumulada Gamma Incompleta se muestran en la Figura 3, con un ajuste casi perfecto.

La Tabla 4 muestra los resultados de la precipitación de excedencia con una probabilidad de excedencia de 0.50 (50 %), obtenidos mediante el modelo propuesto y la FDP Gamma Incompleta. Además, muestra el modelo propuesto para calcular la precipitación con una probabilidad de excedencia de 0.50 con un valor del factor K_T de -0.1879.

La Figura 4, se muestra la distribución temporal de los valores de la precipitación con una probabilidad de excedencia de 0.50 obtenidos con ambas metodologías. La Figura 5 muestra que el modelo

Tabla 3. Valores de la precipitación mensual con una probabilidad de excedencia de 0.10, obtenidos con el modelo de la variable reducida y la Función de Distribución de Probabilidad (FDP) Gamma Incompleta

Mes	$P_{0.10} = P_N + (1.3400*s)$	
	Modelo de la variable reducida	Gamma Incompleta
Enero	193.6	193.5
Febrero	108.7	108.7
Marzo	113.6	113.1
Abril	109.9	108.4
Mayo	219.5	219.5
Junio	403.9	403.9
Julio	315.5	315.6
Agosto	353.8	353.9
Septiembre	489.2	488.9
Octubre	483.3	483.4
Noviembre	290.6	290.7
Diciembre	176.6	176.6

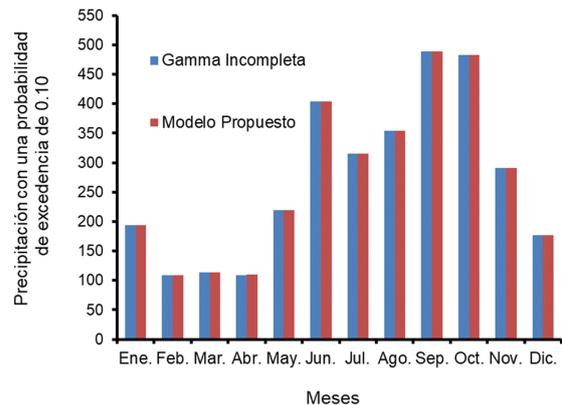


Figura 2. Distribución de la precipitación total mensual con una probabilidad de excedencia de 0.10, calculada con el primer procedimiento y con la FDP Gamma Incompleta

propuesto da valores muy similares a los obtenidos con la función acumulada Gamma Incompleta.

Los resultados del análisis de regresión entre los valores de precipitación calculados con el modelo propuesto y la FDP Gamma Incompleta se muestran en la Figura 5. En la que se puede apreciar un buen ajuste (Coeficiente de Determinación de 0.9974).

Finalmente, y a manera de ejemplo y para la misma estación meteorológica utilizada para calibrar y ajustar el modelo propuesto, en la Tabla 5 se muestran los resultados de la precipitación de excedencia con una probabilidad de 0.80 (80%), obtenidos mediante el modelo propuesto y la función acumulada Gamma Incompleta. En esa misma Tabla 5, se muestra el modelo propuesto para calcular la precipitación con una probabilidad de excedencia de 0.80 con un valor del factor K_T de -0.8457.

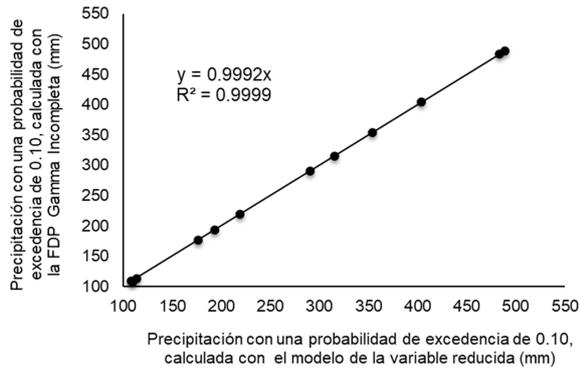


Figura 3. Relación entre la precipitación calculada con el modelo de la variable reducida y la calculada con la FDP Gamma Incompleta para una probabilidad de excedencia de 0.10

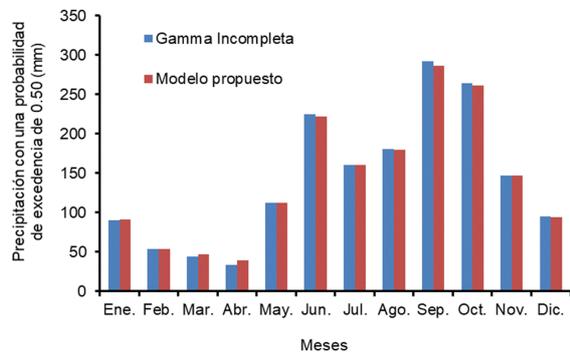


Figura 4. Distribución de la precipitación total mensual con una probabilidad de excedencia de 0.50, calculada con el primer procedimiento y con la FDP Gamma Incompleta

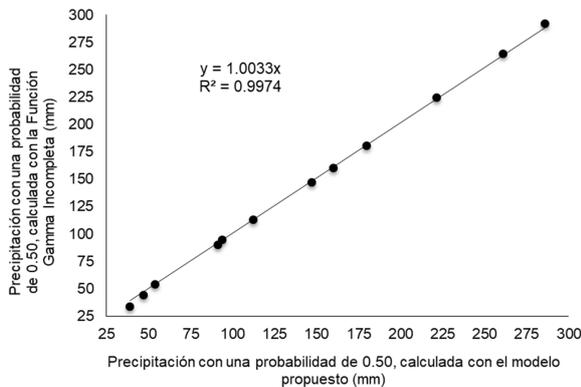


Figura 5. Relación entre la precipitación calculada con el primer procedimiento y la calculada con la FDP Gamma Incompleta para una probabilidad de excedencia de 0.50, para la estación meteorológica 27039 de Samaria, Cunduacán, Tabasco, México

En la **Figura 6**, se muestra la distribución temporal de los valores de la precipitación con una probabilidad de excedencia de 0.80 obtenidos con ambas metodologías, nuevamente se aprecia que el modelo propuesto da valores muy similares de precipitación a los obtenidos con la función acumulada Gamma Incompleta a este nivel de probabilidad de excedencia.

Tabla 4. Valores de la precipitación mensual con una probabilidad de excedencia de 0.50, obtenidos con el modelo propuesto, y la FDP Gamma Incompleta

Mes	$P_{0.50} = P_N + (-0.1879*s)$	
	Modelo	Gamma Incompleta
Enero	91.4	90.1
Febrero	53.8	53.7
Marzo	46.9	44.1
Abril	38.9	33.6
Mayo	112.4	112.8
Junio	221.5	224.8
Julio	160.2	160.5
Agosto	179.9	180.3
Septiembre	285.8	292.1
Octubre	260.9	264.2
Noviembre	147.0	147.2
Diciembre	93.9	94.9

Tabla 5. Valores de la precipitación mensual con una probabilidad de excedencia de 0.80, obtenidos con el modelo y la FDP Gamma Incompleta

Mes	$P_{0.80} = P_N + (-0.8457*s)$	
	Modelo	Gamma Incompleta
Enero	47.5	47.9
Febrero	30.2	30.3
Marzo	18.2	19.3
Abril	8.3	11.3
Mayo	66.3	66.2
Junio	143.0	142.3
Julio	93.3	93.2
Agosto	105.1	105.0
Septiembre	198.3	197.1
Octubre	165.2	164.4
Noviembre	85.2	85.2
Diciembre	58.3	58.1

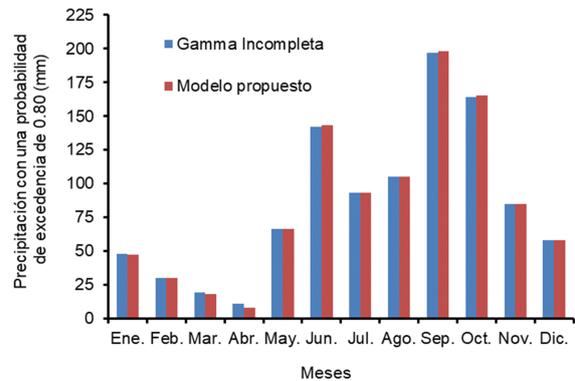


Figura 6. Distribución de la precipitación total mensual con una probabilidad de excedencia de 0.80, calculada con el primer procedimiento y la FDP Gamma Incompleta, para la estación meteorológica 27039 de Samaria, Cunduacán, Tabasco, México

Los resultados del análisis de regresión entre los valores de precipitación calculados con el modelo propuesto y la función acumulada Gamma Incompleta se muestran en la **Figura 7**. En la que se puede apreciar un muy buen ajuste (Coeficiente de Determinación de 0.9982) a este nivel de probabilidad de excedencia.

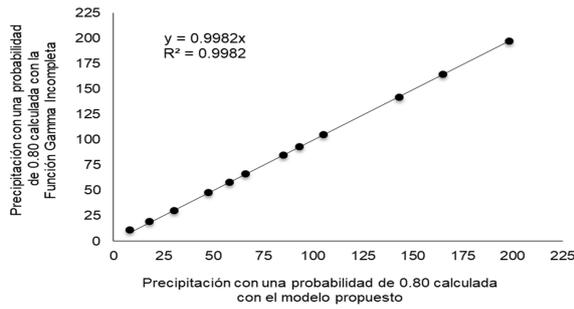


Figura 7. Relación entre la precipitación calculada con el modelo de la variable reducida y la calculada con la FDP Gamma Incompleta para una probabilidad de excedencia de 0.80

Al aplicar los valores del factor K_T de la [Tabla 2](#), a la [ecuación \(5\)](#) se obtuvieron los valores de precipitación para las probabilidades de excedencia correspondientes a cada 0.10 de intervalo. Estos valores se compararon mediante un análisis de regresión lineal simple con los valores obtenidos de la FDP Gamma Incompleta, para el área de influencia de la estación meteorológica 27039 Samaria, Cunduacán, Tabasco México. Las ecuaciones de regresión y los correspondientes valores de los coeficientes de determinación y el estadístico Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE por sus siglas en inglés), se muestran en el [Tabla 6](#).

Se puede apreciar en la [Tabla 6](#), que el valor de la pendiente es muy cercano al valor de uno. Lo que indica que el valor de precipitación calculado por el modelo, es casi igual al calculado por la función acumulada Gamma Incompleta. Esto se confirma al observar al coeficiente de determinación que siempre fue superior a 0.993, con un error cuadrático medio (RMSE) inferior a los 5.5 mm mensuales, que es insignificante.

Validación del modelo en otras localidades de México

Para validar el modelo general con diferente valor del factor K_T para sus correspondientes probabilidades

de excedencia, y constatar la generalización en la aplicación del método propuesto se seleccionaron otras cinco localidades de México, con clima diferente al de la estación meteorológica 27039 Samaria, Cunduacán, Tabasco. Las localidades seleccionadas fueron: Motul de Felipe Carrillo Puerto; Texcoco; Suchiate; Zapopan y Acaponeta, con 45, 31, 35, 48 y 59 años de registro, respectivamente ([Tabla 1](#)). Los resultados se muestran en las [Tablas 7, 8, 9, 10 y 11](#).

En la [Tabla 7](#), se puede observar que todos los modelos tuvieron un $R^2 \geq 0.984$, con variación de la RMSE entre 1.1 a 9.1 mm y con pendiente cercana a la unidad (0.959 a 1.00), siendo la menor a la mayor probabilidad. Es decir que la probabilidad de 0.30 presentó el valor más alto de la RMSE (9.1 mm), mientras que la probabilidad de 0.70 presentó el valor más bajo de la RMSE (1.1 mm). En los meses más secos de una localidad disminuye el R^2 y aumenta la RMSE.

La [Tabla 8](#), muestra que todos los modelos de regresión entre los valores resultantes con el modelo propuesto y la distribución acumulada Gamma incompleta, tuvieron un $R^2 \geq 0.998$; una RMSE que varió entre 0.5 a 2.4 mm y una pendiente cercana a la unidad (0.95 a 1.01) siendo la menor a la mayor probabilidad. La probabilidad de excedencia de 0.30 presentó el valor más alto de la RMSE (2.4 mm), y la probabilidad de excedencia de 0.70 presentó el valor más bajo de la RMSE (0.5 mm).

La [Tabla 9](#), muestra que todos los modelos tuvieron una $R^2 \geq 0.996$; la RMSE varió entre 1.1 a 13.4 mm; una pendiente cercana a la unidad (0.95 a 1.07) siendo la menor a la mayor probabilidad. La probabilidad de 0.40 presentó el valor más alto de la RMSE (13.4mm), mientras que la probabilidad 0.80 presentó el valor más bajo de la RMSE (1.1 mm).

La [Tabla 10](#), muestra que todos los modelos tuvieron una $R^2 \geq 0.996$; la RMSE varió entre 0.9 a 7.5 mm; una pendiente cercana a la unidad (0.95 a 1.02) siendo la menor a la mayor probabilidad. La probabilidad de 0.20 presentó el valor más alto de la RMSE (7.5 mm), mientras que la probabilidad 0.80 presentó el valor más bajo de la RMSE (0.9 mm).

Tabla 6. Ecuaciones de regresión con su coeficiente de determinación (R^2) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), asociados a una probabilidad de excedencia y valor correspondiente del factor K_T obtenido con el modelo de la variable reducida, para el área de influencia de la estación meteorológica 27039 de Samaria, Cunduacán, Tabasco, México

Probabilidad de excedencia	Factor K_T	Ecuación de regresión	R^2	RMSE (mm)
0.90	-1.0960	$Ppt_{\text{gamma}} = 0.9972 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.993	4.0
0.80	-0.8458	$Ppt_{\text{gamma}} = 0.9982 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	2.4
0.70	-0.6270	$Ppt_{\text{gamma}} = 1.0034 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	0.9
0.60	-0.4125	$Ppt_{\text{gamma}} = 1.0040 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	2.9
0.50	-0.1879	$Ppt_{\text{gamma}} = 1.0033 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	4.3
0.40	0.0611	$Ppt_{\text{gamma}} = 1.0020 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	5.2
0.30	0.3556	$Ppt_{\text{gamma}} = 1.0008 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	5.4
0.20	0.7386	$Ppt_{\text{gamma}} = 0.9997 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	4.5
0.10	1.3400	$Ppt_{\text{gamma}} = 0.9992 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.3

Tabla 7. Ecuaciones de regresión con su coeficiente de determinación (R^2) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) asociados a una probabilidad de excedencia y valor correspondiente del factor K_T , para el área de influencia de la estación meteorológica 31020 de Motul de Felipe Carrillo Puerto, Yucatán, México

Probabilidad de excedencia	Factor K_T	Ecuación de regresión	R^2	RMSE (mm)
0.90	-1.0960	$Ppt_{\gamma} = 0.9593 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.989	4.2
0.80	-0.8458	$Ppt_{\gamma} = 0.9970 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	2.3
0.70	-0.6270	$Ppt_{\gamma} = 1.0072 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.1
0.60	-0.4125	$Ppt_{\gamma} = 1.0071 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.996	3.3
0.50	-0.1879	$Ppt_{\gamma} = 1.0017 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.990	6.0
0.40	0.0611	$Ppt_{\gamma} = 0.9958 * Ppt_{\text{modred}}$	0.996	8.0
0.30	0.3556	$Ppt_{\gamma} = 0.9908 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.984	9.1
0.20	0.7386	$Ppt_{\gamma} = 0.9889 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.988	8.5
0.10	1.3400	$Ppt_{\gamma} = 0.9987 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	4.1

Tabla 8. Ecuaciones de regresión con su coeficiente de determinación (R^2) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), asociados a una probabilidad de excedencia y valor correspondiente del factor K_T , para el área de influencia de la estación meteorológica 15125 de Texcoco, Texcoco, Estado de México, México

Probabilidad de excedencia	Factor K_T	Ecuación de regresión	R^2	RMSE (mm)
0.90	-1.0960	$Ppt_{\gamma} = 0.9572 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.5
0.80	-0.8458	$Ppt_{\gamma} = 0.9947 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	0.6
0.70	-0.6270	$Ppt_{\gamma} = 1.0090 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	0.5
0.60	-0.4125	$Ppt_{\gamma} = 1.0149 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.1
0.50	-0.1879	$Ppt_{\gamma} = 1.0157 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	1.8
0.40	0.0611	$Ppt_{\gamma} = 1.0142 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	2.2
0.30	0.3556	$Ppt_{\gamma} = 1.0107 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	2.4
0.20	0.7386	$Ppt_{\gamma} = 1.0057 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	2.1
0.10	1.3400	$Ppt_{\gamma} = 0.9985 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	0.9

Tabla 9. Ecuaciones de regresión con su coeficiente de determinación (R^2) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), asociados a una probabilidad de excedencia y valor correspondiente del factor ' K_T ', para el área de influencia de la estación meteorológica 7163 de Suchiate, Suchiate, Chiapas, México

Probabilidad de excedencia	Factor K_T	Ecuación de regresión	R^2	RMSE (mm)
0.90	-1.0960	$Ppt_{\gamma} = 0.9554 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	4.7
0.80	-0.8458	$Ppt_{\gamma} = 0.9946 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.1
0.70	-0.6270	$Ppt_{\gamma} = 1.0097 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.6
0.60	-0.4125	$Ppt_{\gamma} = 1.0160 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	3.4
0.50	-0.1879	$Ppt_{\gamma} = 1.0167 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	5.6
0.40	0.0611	$Ppt_{\gamma} = 1.0733 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	13.4
0.30	0.3556	$Ppt_{\gamma} = 1.0107 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.996	8.1
0.20	0.7386	$Ppt_{\gamma} = 1.0051 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	7.5
0.10	1.3400	$Ppt_{\gamma} = 0.9976 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	3.7

Tabla 10. Ecuaciones de regresión con su coeficiente de determinación (R^2) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), asociados a una probabilidad de excedencia y valor correspondiente del factor K_T , para el área de influencia de la estación meteorológica 14169 de Zapopan, Zapopan, Jalisco, México

Probabilidad de excedencia	Factor K_T	Ecuación de regresión	R^2	RMSE (mm)
0.90	-1.0960	$Ppt_{\gamma} = 0.9549 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	3.8
0.80	-0.8458	$Ppt_{\gamma} = 0.9956 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	0.9
0.70	-0.6270	$Ppt_{\gamma} = 1.0124 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.3
0.60	-0.4125	$Ppt_{\gamma} = 1.0199 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	2.8
0.50	-0.1879	$Ppt_{\gamma} = 1.0215 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.998	4.1
0.40	0.0611	$Ppt_{\gamma} = 1.0194 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	5.5
0.30	0.3556	$Ppt_{\gamma} = 1.0141 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.996	6.7
0.20	0.7386	$Ppt_{\gamma} = 1.0062 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.996	7.5
0.10	1.3400	$Ppt_{\gamma} = 0.9950 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	6.8

Tabla 11. Ecuaciones de regresión con su coeficiente de determinación (R^2) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), asociados a una probabilidad de excedencia y valor correspondiente del factor K_T , para el área de influencia de la estación meteorológica 18001 de Acaponeta, Acaponeta, Nayarit, México

Probabilidad de excedencia	Factor K_T	Ecuación de regresión	R^2	RMSE (mm)
0.90	-1.0960	$Ppt_{\gamma} = 0.9531 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	7.2
0.80	-0.8458	$Ppt_{\gamma} = 0.9961 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	1.8
0.70	-0.6270	$Ppt_{\gamma} = 1.0131 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	2.1
0.60	-0.4125	$Ppt_{\gamma} = 1.0202 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.999	4.4
0.50	-0.1879	$Ppt_{\gamma} = 1.0206 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.997	7.3
0.40	0.0611	$Ppt_{\gamma} = 1.0171 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.995	10.0
0.30	0.3556	$Ppt_{\gamma} = 1.0106 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.995	12.1
0.20	0.7386	$Ppt_{\gamma} = 1.0023 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.995	12.9
0.10	1.3400	$Ppt_{\gamma} = 0.9923 * Ppt_{\text{modelo}}$	0.996	12.3

La [Tabla 11](#), muestra que todos los modelos tuvieron una $R^2 \geq 0.995$; la RMSE varió entre 1.8 a 12.9 mm; una pendiente cercana a la unidad (0.95 a 1.02) siendo la menor a la mayor probabilidad. Probabilidades iguales o menores a 0.40 presentaron valores de la RMSE ≥ 10.0 mm, mientras que la probabilidad 0.80 presentó el valor más bajo de la RMSE (1.8 mm).

CONCLUSIONES

Los valores del factor de frecuencia K_T reportados, se recomiendan para obtener la precipitación total mensual a una deseada probabilidad de excedencia, ya que tuvieron un muy buen ajuste en relación a los valores obtenidos con la función de distribución de probabilidad Gamma Incompleta. Los valores del factor K_T obtenidos son muy confiables y de simple aplicación para calcular la probabilidad de lluvia de preferencia en zonas agrícolas de temporal, donde la precipitación total anual es igual o mayor a los 500 mm.

REFERENCIAS

- Arroyo, I., Bravo, L. C., Llinás, H. & Muñoz, F. L. (2014). Poisson and gamma distributions: A discrete and continuous relation. *Prospectiva*, 12(1), 99-107. <https://doi.org/10.15665/rp.v12i1.156>
- Bokke, A. S. & Shoro, K. E. (2020). Impact of effective rainfall on net irrigation water requirement: The case of Ethiopia. *Water Science*, 34(1), 155-163. <https://doi.org/10.1080/11104929.2020.1749780>
- Chow, V. T. (1951). A general formula for hydrologic frequency analysis. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 32(2), 231-237. <https://doi.org/10.1029/TR032i002p00231>
- Evin, G., Merleau, J. & Perreault, L. (2011). Two-component mixtures of normal, gamma, and gumbel distributions for hydrological applications. *Water Resources Research*, 47(8), W08525. <https://doi.org/10.1029/2010WR010266>
- Hargreaves, G. H. & Jensen, D. T. (2002). Simplification of planning to meet future demands for food and water. En *Energy: Climate, Environment and Water—Issues and Opportunities for Irrigation and Drainage* (p. 513). USCID/EWRI. <https://hdl.handle.net/10217/206923>
- Husak, G. J., Michaelsen, J. & Funk, C. (2007). Use of the gamma distribution to represent monthly rainfall in Africa for drought monitoring applications. *International Journal of Climatology*, 27(7), 935-944. <https://doi.org/10.1002/joc.1441>
- Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. (2009). *ERIC III: Extractor Rápido de Información Climatológica v.2* [CD-ROM].
- Jadhav, M. G., Aher, H. V., Jadhav, A. S. & Gote, G. N. (2015). Crop planning based on moisture adequacy index (MAI) of different talukas of Aurangabad District of Maharashtra. *Indian Journal of Dryland Agricultural Research and Development*, 30(1), 101-103. <https://doi.org/10.5958/2231-6701.2015.00016.0>
- Johnson, R. A., Miller, I. & Freund, J. E. (2018). *Probability and statistics for engineers* (9.a ed.). Pearson Education Ltd.
- Kite, G. W. (1977). *Frequency and risk analyses in hydrology*. Water Resources Publications. <https://es.scribd.com/document/487410158/Frequency-and-Risk-Analyses-in-Hidrology-G-W-Kite>
- Laux, P., Wagner, S., Wagner, A., Jacobeit, J., Bárdossy, A. & Kunstmann, H. (2009). Modelling daily precipitation features in the Volta Basin of West Africa. *International Journal of Climatology*, 29(7), 937-954. <https://doi.org/10.1002/joc.1852>
- Machado-Fernández, J. R. (2016). Modelación de la Distribución Gamma en MATLAB para Aplicaciones de Radar. *Ciencias Holguín*, 22(4), 1-17. <https://www.redalyc.org/pdf/1815/181548029005.pdf>
- Nkegbe, P. K. & Shankar, B. (2014). Adoption intensity of soil and water conservation practices

- by smallholders: Evidence from Northern Ghana. *Bio-based and Applied Economics*, 3(2), 159-174. <https://doi.org/10.13128/BAE-13246>
- Sahu, T., Chaudhary, J. L. & Sahu, K. K. (2022). Analysis of rainfall probabilities and crop planning for different districts of Chhattisgarh. *International Journal of Environment and Climate Change*, 12(10), 858-862. <https://doi.org/10.9734/ijec/2022/v12i1030873>
- Sharma, M. A. & Singh, J. B. (2010). Use of probability distribution in rainfall analysis. *New York Science Journal*, 3(9), 40-49. https://www.sciencepub.net/newyork/ny0309/07_3294ny0309_40_49_02.pdf
- Stöckle, C. O., Kjelgaard, J. & Bellocchi, G. (2004). Evaluation of estimated weather data for calculating Penman-Monteith reference crop evapotranspiration. *Irrigation Science*, 23(1), 39-46. <https://doi.org/10.1007/s00271-004-0091-0>
- Vergni, L., Todisco, F., Di Lena, B. & Mannocchi, F. (2020). Bivariate analysis of drought duration and severity for irrigation planning. *Agricultural Water Management*, 229, 105926. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2019.105926>
- Wilks, D. S. (2006). *Statistical methods in the atmospheric sciences* (2.a ed.). Academic Press. <https://www.sciencedirect.com/book/9780128158234/statistical-methods-in-the-atmospheric-sciences>

Lorenzo Armando Aceves Navarro. Colegio de Postgraduados - Campus Tabasco. Área de Ciencia Ambiental. E-mail: [laceves@colpos.mx](mailto:lanceves@colpos.mx).

Benigno Rivera Hernández. Universidad Popular de la Chontalpa. Área de Ciencias Agrícolas. E-mail: benigno.rivera@pch.mx.

José Francisco Juárez López. Colegio de Postgraduados - Campus Tabasco. Área de Ciencia Ambiental.

Agrícola Arrieta Rivera. Tecnológico Nacional de México/Zona Olmeca. E-mail: Agricola.ar@zolmeca.tecnm.mx