

# Reseña bibliográfica acerca de la evolución y desarrollo de la modelación matemática de la capa límite de la atmósfera

Autor: ALDO SATURNINO MOYA ÁLVAREZ

Centro Meteorológico Provincial. Villa Clara

## Resumen

La capa límite de la atmósfera es una zona de transición entre la atmósfera libre y la superficie. La presencia en ella de notables gradientes de las variables meteorológicas da lugar al surgimiento de flujos ascendentes y descendentes de las magnitudes meteorológicas que juegan un papel fundamental en el comportamiento y desarrollo de los procesos atmosféricos en el espacio y el tiempo. El estudio de la capa límite de la atmósfera ha ido desarrollándose paulatinamente durante los últimos 115 años, desde las formulaciones de los primeros conceptos de turbulencia en los fluidos establecidos por Reynolds (1883), hasta los esquemas de parametrización elaborados en la actualidad y empleados en los modelos hidrodinámicos de pronóstico a corto y mediano plazo, así como en los modelos de circulación atmosférica. En la presente reseña se hace un esbozo sobre el desarrollo y perfeccionando los métodos de descripción de los procesos que tienen lugar en la capa límite de la atmósfera, partiendo desde los que se basan en la obtención de los flujos turbulentos a partir de los coeficientes de intercambio o de resistencia, hasta los más actuales, elaborados sobre la base de la solución del sistema de ecuaciones de hidrotérmica, pasando por las formulaciones de Monin - Obukjov (1953 y 1954) para la capa superficial.

**Palabras claves:** Capa límite planetaria, capa superficial, flujos turbulentos, coeficientes de intercambio, teoría de la semejanza.

## Introducción

Los modelos de pronósticos meteorológicos, según su tipo, describirán mejor la evolución de los procesos atmosféricos en la medida en que se logre una mejor correlación entre la dimensión característica de la velocidad del flujo en la región de pronóstico, el intervalo de pronóstico y el paso de rejilla utilizado cumplen con una determinada correlación, definida para cada tipo de modelo. Por ejemplo, para modelos baroclínicos debe cumplirse que:

$$\frac{U\Delta t}{\Delta r} \leq 0.7$$

donde:

$U$  – Velocidad del movimiento

$\Delta t$  – Intervalo de tiempo de pronóstico

$\Delta r$  – Paso de rejilla

Por tanto, para determinar la distancia entre los nodos de la rejilla que se pretende emplear es necesario considerar el tipo de proceso que se desea modelar. Los modelos de macroescala, por ejemplo, describen solamente los procesos con longitudes de ondas de miles de kilómetros. Por otra parte, está

demostrado matemáticamente (Belov, 1989) que una rejilla va a describir un proceso sólo si se cumple que:

$$L \geq 4\Delta r$$

donde:

$L$  – Longitud de onda del proceso.

Quiere decir esto, que los procesos con longitudes de onda inferiores, no podrán ser descritos por estos modelos, y serán descritos solamente en caso de que se reduzca el paso de rejilla a tal punto que se cumpla que  $\Delta r \leq L/4$ , lo que incrementaría considerablemente el número de puntos de la rejilla y por consiguiente el tiempo de máquina y de memoria operativa. Así mismo, no todos los procesos que ocurren en la atmósfera pueden ser descritos a través de la solución de ecuaciones diferenciales.

Para los modelos macroescalares, entre los procesos que un pueden ser descritos directamente, se encuentran los relacionados con la llamada «Capa Límite» de la atmósfera. Durante los últimos cien años los científicos han venido dedicando numerosos trabajos al estudio de los procesos turbulentos que ocurren en esta capa y ya en las últimas décadas del siglo XX alcanzaron gran desarrollo los llamados «métodos de parametrización de la capa límite», los cuales han conllevado a un mejoramiento notable de la calidad de los pronósticos.

La modelación de la capa límite de la atmósfera se puede enfocar desde dos puntos de vista fundamentales: El desarrollo teórico de los conceptos y definiciones de diferentes características de la capa límite y la aplicación de dichos conceptos a problemas relacionados con el pronóstico del tiempo, dispersión atmosférica de contaminantes, etc. El primero de los puntos de vista ha venido evolucionando con el desarrollo del pensamiento humano en relación con esta problemática; el segundo se ha ido desarrollando en la medida en que la evolución de las nuevas tecnologías de cálculo se lo ha ido permitiendo. Mostrar el desarrollo que paulatinamente se ha venido alcanzando en la comprensión de los procesos que ocurren en esta parte de la atmósfera, constituye el objetivo fundamental de este trabajo.

## Desarrollo

Los primeros trabajos acerca de la existencia de la turbulencia en los fluidos fueron presentados en el siglo XIX por el inglés O. Reynolds (1883), quien logró llevar la ecuación de conservación del movimiento de Navier - Stokes a una nueva forma, que consideraría la existencia de pulsaciones en el flujo provocadas por la presencia de vórtices turbulentos. En este caso se presenta la velocidad del movimiento como la suma de su valor medio más las pulsaciones que surgen en el flujo:

$$U = \bar{U} + U' ; \quad (1)$$

aquí

$U$  - Velocidad del movimiento.

$\bar{U}$  - Valor medio de la velocidad del movimiento.

$U'$  - Pulsaciones en la velocidad del movimiento.

La ecuación obtenida por Reynolds presenta la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{F_i}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_a^2} - \frac{\partial}{\partial x_a} (\overline{u'_i u'_a}) \quad (2)$$

donde:

$u_i$  - Componentes de la velocidad del viento.

$p$  - Presión atmosférica.

$\rho$  - Densidad del aire.

$F$  - Fuerza de Coriolis.

$g$  - Aceleración de la gravedad.

$\rho_0$  - Densidad del aire en superficie.

$u'_i u'_a$  - Pulsaciones de las componentes de la velocidad del viento para cada eje.

$x_a$  - Representa a los tres ejes de coordenadas

$x_j$  - Representa al eje de coordenadas  $x$ .

El último miembro de esta ecuación cuantifica el efecto del mezclado turbulento sobre el cambio de la velocidad media en el tiempo.

Esta ecuación permite definir la expresión

$$\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \tau_{i,j} \quad (3)$$

como la fuerza tangencial de rozamiento turbulento condicionado por la componente «  $j$  » de la velocidad y actuante en la dirección «  $i$  », es decir

$$R_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j} \quad (4)$$

Reynolds estableció además que para que en un medio existan vórtices turbulentos, la relación entre las fuerzas inerciales y las de fricción interna deben superar un cierto valor crítico

$$R_e = \frac{u \frac{\partial u}{\partial z}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = \frac{Vd}{\nu} \quad (5)$$

donde:

$d$  - Dimensión característica del movimiento.

$\nu$  - Coeficiente de viscosidad molecular.

$R_e$  - Número de Reynolds.

$V$  - Velocidad del movimiento.

$z$  - Coordenada vertical.

Se ha demostrado que si  $R_e < R_{ec}$  los vórtices turbulentos no pueden existir. Para el aire  $R_{ec} = 3000$  (Schlichting H., 1956).

La existencia de la ecuación de Reynolds trajo como consecuencia que surgieran en el sistema de ecuaciones de hidrodinámica nuevos miembros, por lo que se convirtió en un sistema abierto, es decir, el número de variables desconocidas es superior al número de ecuaciones.

Uno de los métodos empleados para cerrar entonces el sistema de ecuaciones fue la conocida «teoría  $k$ » de la turbulencia, descrita en los trabajos de Monin y Yaglon (1965), basada en la hipótesis de Boussinesq (1887) de que la fricción interna en un fluido es directamente proporcional a la variación espacial de la velocidad del movimiento. Según esta teoría los miembros  $(u'_i u'_a)$  de la ecuación de Reynolds pueden expresarse a través de la variación de los valores medios de  $u_i$  en el plano  $x_a$ , mediante el empleo de un coeficiente de proporcionalidad llamado «coeficiente de turbulencia».

Para los flujos turbulentos de impulso, calor y humedad en el plano vertical las expresiones toman la siguiente forma:

$$\tau_z = -\rho k_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (6)$$

$$Q_z = -C_p \rho k_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (7)$$

$$E_z = -\rho k_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (8)$$

donde:

$\bar{u}$  – Velocidad media del movimiento.

$\bar{\theta}$  – Temperatura potencial media.

$\bar{q}$  – Humedad específica media.

$\tau_z, Q_z, E_z$  – Flujos turbulentos de impulso, calor y humedad en la coordenada vertical

$k_u, k_\theta, k_q$  – Coeficientes de turbulencia para la velocidad del viento, la temperatura y la humedad respectivamente

$C_p$  – Calor específico del aire a presión constante

$z$  – Coordenada vertical.

De las expresiones (6), (7) y (8) se deduce que los flujos turbulentos van a ser más significativos en aquella zona de la atmósfera donde los gradientes verticales de las magnitudes meteorológicas sean mayores. Estas condiciones existen generalmente en la capa más cercana a la superficie de la tierra, la cual fue identificada y nombrada como «capa frontera» por Prandtl en 1904.

Prandtl señaló además la existencia de una subcapa en la cual las magnitudes  $\tau_z, Q_z, E_z$  varían muy lentamente con la altura y en la cual el viento va a mantener una dirección constante en la vertical, sin embargo su velocidad va a aumentar siguiendo la siguiente ley logarítmica.

$$u(z) = \frac{v_*}{k_p} \ln \frac{z + z_0}{z_0} \quad (9)$$

donde:

$u$  – Velocidad del viento.

$v_*$  – Velocidad dinámica.

$z_0$  – Parámetro de rugosidad.

### Constante de Karman.

El análisis de numerosos materiales históricos ha demostrado que esta ley se cumple solamente cuando la estratificación térmica es cercana a la neutral (Zilitinkievich (1970) y Melechko et al. (1983)). Para resolver esta situación fueron introducidas las llamadas "funciones universales", las que son capaces de considerar la desviación de la estratificación térmica en relación con la neutral.

Las leyes que caracterizan la distribución vertical de las variables meteorológicas en la capa superficial, considerando a ésta como una capa estratificada, fueron establecidas por Monin - Obukhov (1953 y 1954), quienes obtuvieron las expresiones para la determinación de los perfiles verticales del viento, de la temperatura y de las características energéticas de la turbulencia en casos de estratificación térmica diferente de la neutral. Las expresiones de las leyes de Monin - Obukhov son las siguientes:

$$u(\xi) = \frac{v_*}{k_p} \left[ \ln \frac{\xi}{\xi_0} - \psi_u(\xi) + \psi_u(\xi_0) \right]; \quad (10)$$

$$\theta(\xi) = \theta(\xi_0) + \frac{\theta_*}{k_p} \left[ \ln \frac{\xi}{\xi_0} - \psi_\theta(\xi) + \psi_\theta(\xi_0) \right]; \quad (11)$$

$$k(\xi) = k p v_* L_0 \left( \frac{1}{\xi} - \frac{d\psi_u(\xi)}{d\xi} \right)^{-1}; \quad (12)$$

$$b(\xi) = \alpha_* \frac{1}{2} v_*^2 \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\xi} - \frac{d\psi_u(\xi)}{d\xi} \right)^{-1}}; \quad (13)$$

$$\epsilon(\xi) = \frac{v_*^3}{k_p L_0} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{d\psi_u(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{g}{\theta_*} \frac{Q_0}{C_p \rho}; \quad (14)$$

donde:

$\xi$  – Coordenada vertical normalizada por el parámetro de longitud de Monin - Obukhov.

$L_0 = -v_*^3 / (k_p \frac{g}{\theta_*} Q_0 / (C_p \rho))$  – Longitud de Monin - Obukhov, obtenida en la década de los años 50 del siglo XX a partir de la combinación de las dimensiones características para la temperatura y la velocidad del viento.

$\theta$  – Temperatura potencial

$\theta - \theta_0$  – Temperatura potencial en superficie

$\theta - \theta_* = -Q_0 / (C_p \rho v_*)$  – Dimensión característica de la temperatura

$\theta - k$  – Coeficiente de turbulencia

$b$  – Intensidad de la turbulencia

$\epsilon$  – Velocidad de transformación de la energía cinética en calorífica

$Q_0$  - Flujo turbulento de calor

$\psi_u, \psi_\theta$  - Funciones universales para el viento y la temperatura respectivamente

Las leyes establecidas por Monin y Obukhov fueron comprobadas por Bussinger (1971), Krauss (1972) y Arya (1981), sin embargo las formulaciones 11 - 14, lograron describir la distribución de las variables meteorológicas en la capa superficial para estratificaciones neutrales o estables e inestables no muy lejanas de la neutralidad.

Paulson (1970) obtuvo formulaciones similares para casos muy inestables y Zilitinkevich (1970) las obtuvo para los casos muy estables.

Así mismo las funciones universales han sido perfeccionadas posteriormente por otros autores, tal es el caso de Kazakov y Lasriev (1978) y Wilczac et al. (1984). Estas últimas se encuentran entre las más empleadas por arrojar buenos resultados (Bisova et al, 1989):

$$\psi_u = 1 + Bu\xi, \quad \text{si } Lo > 0 \quad (15)$$

$$\psi_\theta = (1 - 15\xi^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{si } Lo < 0 \quad (16)$$

$$\psi_\theta = 0.74 + Bt\xi, \quad \text{si } Lo > 0 \quad (17)$$

$$\psi_\theta = (1 - 9\xi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{si } Lo < 0 \quad (18)$$

Ekman (1906) señaló que en la capa frontera planetaria, excepto en la capa superficial, el viento gira con la altura respondiendo a una distribución en espiral bajo la influencia del equilibrio entre las fuerzas del gradiente bórico, la Fuerza de Coriolis y la fuerza de fricción. El hecho de que en las bajas latitudes la Fuerza de Coriolis tiende a cero impide el cumplimiento de esta definición en esta parte del planeta. La expresión para determinar el espesor de la capa de Ekman es la siguiente.

$$Le = \frac{k_p v_*}{f} \quad (19)$$

donde:

$Le$  - Altura de la capa de Ekman

$f = 2\omega \sin \varphi$  - Parámetro de Coriolis.

$\omega = 7.29 \times 10^{-5}$  - Velocidad angular de rotación de la tierra.

$\varphi$  - Latitud del lugar.

La introducción de la altura de la capa de Ekman permitió establecer una de las primeras definiciones de la frontera superior de la capa frontera planetaria, con el criterio de que dicha capa va a presentar su límite superior siguiendo diferentes aspectos de cercanía de sus condiciones a las de la atmósfera libre. Ahora bien, esta aproximación no siempre es factible, pues en la mayoría de los casos la altura de la capa frontera depende de una serie de factores externos e internos que interactúan entre sí, por lo que se hace necesario, de acuerdo a Vager y Nadiéchina (1979), introducir otros criterios para su determinación. Los diferentes métodos para determinar el límite superior de la capa frontera planetaria serán descritos más adelante.

Paralelamente al desarrollo de las diferentes teorías de la capa frontera se han ido desarrollando disímiles modelos que permiten describir las características de dicha capa, así como definir la altura de su frontera superior y parametrizar los flujos turbulentos. Los métodos más conocidos de parametrización de la capa frontera están basados en los cálculos de los flujos turbulentos de impulso, calor y humedad (Penenko (1981), Manton (1983) y Kibel (1984)). Los más sencillos son aquellos que permiten calcular los flujos turbulentos con ayuda de los coeficientes de intercambio turbulento de impulso, calor y humedad, llamados también coeficientes de resistencia (Anthes (1985)).

Para el flujo turbulento de calor se emplea el número de Stenton y en el caso de la humedad el número de Smith, aplicado a la atmósfera por Shuleikin (1928; 1933 y 1968) y Sverdrupp (1938). Este método depende directamente de una clasificación previa del tipo de estratificación de la atmósfera, para lo cual se emplea frecuentemente el número de Richardson, obtenido en 1926:

$$R_i = \frac{g}{\bar{T}} \frac{\frac{\partial \theta}{\partial z}}{(\frac{\partial u}{\partial z})^2} \quad (20)$$

aquí  $\bar{T}$  - Temperatura absoluta media de la capa

Esta solución, basada en el cálculo de los flujos turbulentos con ayuda de los coeficientes de intercambio, está presente en los esquemas de parametrización de Deardoff (1972 y 1974), Louis (1979) y de Arakawa (1972 y 1984).

Otros métodos, que cobraron auge desde la década de los años 60 del siglo XX, basan el cálculo de los flujos turbulentos de impulso, calor y humedad en la teoría de Monin - Obukhov (1953 y 1954) para la capa frontera superficial y la teoría de Monin -

Kazanski (1960) para la capa fronteriza planetaria. Estos han sido empleados por Penenko (1981), Berkovich y Tkacheva (1982) en el modelo semisférico de pronóstico para varios días, Manton (1983), en la parametrización de la difusión vertical en el modelo del ECMWF, Kibel (1984) y Marchuk (1984).

De acuerdo con la teoría de Monin - Obukhov, cuyas formulaciones para la distribución vertical de las variables meteorológicas en la capa superficial ya fueron mostradas anteriormente, el cambio de la velocidad del viento, la temperatura y la humedad en esta capa, se determina por la dimensión característica correspondiente y la función universal de altura, normalizada por la longitud «  $L_0$  ».

$$\delta A = A \cdot \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \psi_\alpha \left( \frac{z}{L_0} \right) + \psi_\alpha \left( \frac{z_0}{L_0} \right) \right] \quad (21)$$

en la cual, según el caso:

$$\delta A = \begin{cases} V(z) \\ \theta(z) - \theta(z_0) \\ q(z) - q(z_0) \end{cases} \quad (22)$$

$$A = \begin{cases} v_* / k_p \\ -(Q_0 / (C_p \rho)) / (k_p v_*) \\ -(E_0 / \rho) / (k_p v_*) \end{cases} \quad (23)$$

donde:

$q$  - Humedad específica

$E_0$  - Flujo turbulento de humedad

En estos modelos, que utilizan la teoría de Monin - Obukhov para la capa superficial y la de Monin - Kazanski para la capa fronteriza planetaria, la frontera inferior se encuentra en la superficie subyacente y los flujos turbulentos de impulso, calor y humedad se calculan utilizando las expresiones anteriores para  $\delta A$  y el empleo de los valores conocidos de  $V(z)$ ,  $\theta(z) - \theta(z_0)$ ,  $q(z) - q(z_0)$ , así como las funciones universales.

Panchev (1972) diseñó un método de cálculo de los flujos en la capa fronteriza planetaria. Los flujos turbulentos se calcularon con ayuda de la «teoría k» de la turbulencia a partir de la velocidad del viento, la temperatura y la humedad en la frontera superior de la capa superficial.

$$\tau_x = \rho \alpha_1 k \delta u; \quad (24)$$

$$\tau_y = \rho \alpha_1 k \delta v; \quad (25)$$

$$Q = -\rho C_p \alpha_1 k \delta \theta; \quad (26)$$

$$E = -\rho \alpha_1 k \delta q; \quad (27)$$

$$\delta \theta = T_1 - T_h + (\gamma_a - \gamma_G) / \alpha_1; \quad (28)$$

$$\delta A = A_1 - A_h; \quad (29)$$

donde  $A = u, v, q; \alpha_1 = -(g / (RT)) / \ln \sigma_1; \sigma = p / p_s; A_1, T_1$  - Valores de las variables meteorológicas en la superficie de la cual se tiene información.

Para el coeficiente de turbulencia «  $k$  », sobre la base de las valoraciones de la velocidad de las transformaciones de las masas de aire sobre superficies relativamente homogéneas de océano o continentes, existe una dependencia de la estratificación térmica de la capa:

$$k = \begin{cases} a_1 + a_2 (1 - \exp(-a_3 \alpha_1 \delta \theta)) \\ a_1 / (1 + a_4 R_i) + a_5 \end{cases} \quad (30)$$

donde  $R_i$  - Número de Richardson

$$a_3 = 1.2 \times 10^3 \text{ m} / \text{K}; \quad a_4 = 40; \quad a_5 = 2 \text{ m}^2 / \text{s};$$

$$a_6 = 10^{-12} \text{ m}^2 / \text{s}^2$$

Una dificultad importante en este método lo constituye la necesidad de determinar previamente el valor del coeficiente de intercambio turbulento vertical, ya que los métodos para calcularlos no son suficientemente exactos. Debido a lo anterior se recomienda por Yordanov (1980) y Billard et al. (1981) el empleo de la teoría Monin - Kazanski para la capa fronteriza planetaria.

Según la teoría de Monin - Kazanski, las leyes de resistencia y de intercambio térmico enlazan el coeficiente geostrófico de rozamiento  $\chi$ , el ángulo de inclinación del viento real del geostrófico  $\alpha$ , la variación de la temperatura potencial en la altura y el parámetro interno de estratificación  $\mu_0$  con el número de Rossby  $Ro$ .

$$\ln(Ro) = B(\mu_0) - \ln(k_p \chi) + \sqrt{x^{-2} - A^2(\mu_0)}; \quad (31)$$

$$\sin \alpha = -A(\mu_0) \chi \text{sign}(f); \quad (32)$$

$$\frac{\delta \theta}{\theta_0} = \frac{1}{\alpha_0} [\ln(k_p Ro \chi) - C(\mu_0)]; \quad (33)$$

donde:

$\chi = v_* / (k_p |V_g|)$  - Coeficiente geostrófico de rozamiento

$\mu_0 = Le / Lo$  – Parámetro interno de estratificación

$Ro = |V_g| / (fz_0)$  – Número de Rossby

$\alpha$  – Ángulo de desviación entre el viento geostrofico y el real

$A$ ,  $B$  y  $C$  – Funciones universales

$sign(f)$  – Signo del parámetro de Coriolis  $f$ .

Bondarenko y Chnaiman (1981) demostraron que este método incrementa las características de la turbulencia y perturba el perfil vertical de la velocidad del viento.

Por otra parte Wippermann (1976) y Billard et al. (1981) demostraron que los datos experimentales de las funciones universales  $A(\mu_0)$  y  $B(\mu_0)$  se diferencian significativamente de los calculados.

Las variantes posteriores a los métodos antes descritos corrigieron estas insuficiencias y las leyes de resistencia y de intercambio de calor se cumplieron con suficiente exactitud, según los trabajos de Chnaiman et al. (1987).

En estos métodos, los cuales emplean teorías diferentes para describir las características de la capa superficial y la capa fronteriza planetaria por encima de ésta, también se trata de caracterizar la estratificación de la capa fronteriza libre independientemente de la capa superficial, empleándose correlaciones que incluyen tanto los factores dinámicos como las características térmicas de la capa. Para determinar la estratificación térmica de la capa fronteriza planetaria, por encima de la capa superficial, en este caso Melechko et al. (1983) concluyó que es conveniente el empleo de un gradiente térmico adiabático modificado de 0.0065 k/m para los continentes y 0.0055 k/m sobre los océanos. De esta forma se supone que se consideraría el flujo de calor complementario producido por los procesos convectivos.

En las últimas décadas del siglo XX alcanzaron gran desarrollo los esquemas de parametrización basados en la solución del sistema de ecuaciones de hidrotérmodinámica. En estos métodos el problema fundamental se va a concentrar en lograr cerrar el sistema de ecuaciones lo más exactamente posible.

En las investigaciones realizadas, para cerrar el sistema de ecuaciones, ha sido utilizada la ecuación para la energía cinética de la turbulencia y las correlaciones de Kolmogorov (1942) para el coeficiente de turbulencia, a partir de la dimensión característica de los vórtices turbulentos y para la velocidad de transformación de la energía cinética en calorífica. Este método ha sido empleado en los trabajos de Mellor y Jamada (1982), Panofski (1985) y Mahiot et al. (1986).

$$k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] + \frac{g}{\theta_0} \frac{Q(z)}{c_p \rho} + \alpha_b \frac{d}{dz} k \frac{db}{dz} - \varepsilon = 0 \quad (34)$$

$$k = \alpha_k l \sqrt{b} \quad (35)$$

$$\varepsilon = \alpha_\varepsilon b^2 / k \quad (36)$$

aquí  $l$  es la dimensión característica de los vórtices turbulentos o camino de mezclamiento, introducido por Karman (1930).

Evidentemente, para cerrar el sistema, es imprescindible escribir la correlación para la obtención de  $l$ . Con este objetivo se emplean frecuentemente tres variantes fundamentales:

- Obtención del perfil vertical de la dimensión de los vórtices turbulentos por datos experimentales.
- Cálculo por la expresión de Karman.
- El empleo de la ecuación diferencial para la dimensión característica de los vórtices turbulentos.

El primero de estos métodos fue utilizado en los trabajos de Blackadar (1962), Zilitinkevich (1970) y Wippermann (1976). En correspondencia con los datos experimentales, Blackadar (1962), consideró que en la parte inferior de la capa fronteriza la dimensión de los vórtices turbulentos aumenta con la altura linealmente y luego tiende a tomar un valor constante.

$$l = k_p z / (1 + \lambda z) \quad (37)$$

$$\lambda = 160m$$

Vagner y Nadiechina (1979) demostraron que la fórmula (37) se cumple para una atmósfera débilmente estratificada. Además, ya en el propio año 1962, Gruza había demostrado que para condiciones de fuerte estabilidad o inestabilidad los valores de  $l$  calculados por esta fórmula resultaban sobredimensionados. Por tal motivo en sus trabajos propone el empleo de formas más complejas de dependencia de  $l(z)$ , sin embargo no alcanzaron gran popularidad debido a que se complicaban los algoritmos y no mejoran mucho los resultados.

Mayor fundamento físico para el cálculo de  $l$  posee la hipótesis de Karman (1930) descrita en los trabajos de Monin – Yaglon (1965), Lajitman (1970) y Chnaiman y Tarnopolski (1977). Esta hipótesis parte del hecho conocido de que para un fluido a través de un tubo, la dimensión característica de los vórtices se expresa mediante las derivadas de la velocidad del flujo:

$$cl = -k_p \frac{d\bar{u}}{dz} / \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \quad (38)$$

donde  $c = \alpha_e^{-1/4}$ ;  $\alpha_e = 0.04 \dots 0.1$

En 1970 el propio Lajitman perfeccionó esta expresión con el empleo de la función de flujo  $\psi$ .

$$cl = -k_p \psi / \frac{d\psi}{dz} \quad (39)$$

para un flujo unidimensional se cumple que:

$$\psi = \frac{du}{dz} \quad (40)$$

Para un flujo bidimensional:

$$\psi = \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}, \quad (41)$$

y para un flujo estratificado:

$$\psi = \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - \alpha_0 \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta}{dz}} \quad (42)$$

La combinación de las expresiones para  $k, cl$  y  $\psi$ , permitió obtener la ecuación diferencial para el coeficiente de turbulencia (Lajitman, 1970), la cual dejó cerrado el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dk}{dz} - \frac{k}{b} \frac{db}{dz} - \alpha_e \frac{1}{4} \sqrt{b} = 0 \quad (43)$$

Paralelamente a esta metodología, con el objetivo de perfeccionar el cierre del sistema de ecuaciones, fue introducida la ecuación diferencial para la velocidad de transformación de la energía cinética en calorífica (Lauder et al. (1975), Zeman (1979) y Mellor (1985)).

$$k \left[ \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \right] + \alpha_1 \frac{g}{\theta_0} \frac{Q(z)}{c_p \rho} + \alpha_2 \frac{b}{\varepsilon} \frac{d}{dz} k \frac{d\varepsilon}{dz} - \alpha_3 \varepsilon = 0 \quad (44)$$

donde  $\alpha_1 = 0.7$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\alpha_3 = 1.3$

El análisis para la obtención de la ecuación (44) puede verse en las publicaciones de Spaldin (1972) y Vagner y Nadietchina (1976). Su empleo permitió prescindir del empleo de las hipótesis de Kolmogorov y Karman para la dimensión característica de los vórtices turbulentos.

De esta forma, con el empleo de las ecuaciones para la energía de la turbulencia, la velocidad de disipación de dicha energía en calorífica y la correlación de Kolmogorov para el coeficiente de turbulencia, el sistema quedó cerrado con un fundamento físico más fortalecido.

En relación con los métodos empleados para cerrar el sistema de ecuaciones de hidrodinámica sobre la base de la «teoría k» de la turbulencia fueron elaborados esquemas que incluyen las ecuaciones para los segundos momentos de las magnitudes meteorológicas, las cuales son más complejas y deben considerarse de forma más detallada los procesos físicos que dan lugar a la formación de la capa frontal (Monin – Yaglon (1965); Andre (1981 y 1983), Beniston y Someria (1981), Moeng Chin Hon y Randall (1984) y Deardorff (1985)).

Sin embargo, Burk y Thompson (1982) demostraron en sus trabajos que las ventajas de esta variante poco se reflejan en los resultados de los pronósticos. Es más objetivo, según Korrel et al. (1982) y Deardorff (1985), el uso de altos niveles de exactitud al cerrar el sistema de ecuaciones de hidrodinámica.

Todas estas modificaciones fueron empleadas por Bondarenko y Chnaiman (1981), donde valoraron la exactitud de la descripción de la estructura vertical capa frontal superficial y realizaron comparaciones con el empleo de diferentes expresiones de la teoría de Monin – Obukhov, demostrándose lo ventajoso del empleo de las funciones de Bussinger.

Hasta ahora todos los métodos mencionados basados en el sistema de ecuaciones de hidrodinámica lo habían hecho a partir de la consideración de una atmósfera estacionaria. Aloyan et al. (1981) obtuvo un sistema de ecuaciones cerrado para describir la estructura de la capa frontal en condiciones de una atmósfera no estacionaria. Dicho sistema incluye las ecuaciones de movimiento, flujo de calor, balance de humedad y la ecuación de la continuidad. El cierre del sistema se ejecutó con ayuda de la ecuación de balance de energía cinética, la correlación de Kolmogorov y la hipótesis de Karman para las dimensiones de los vórtices. Además Mellor y Jamada (1982) señalan que en estos modelos existen problemas con el cálculo de la velocidad de transformación de la energía cinética en calorífica, lo que conlleva a la imprescindibilidad del uso de la ecuación diferencial para esta variable.

Este esquema, diseñado para una atmósfera no estacionaria, no alcanzó gran aplicación, pues los cálculos tomaron gran complejidad, máxime si se tiene en cuenta que se está tratando la circulación macroescalar, para la cual la consideración de estacionalidad es adecuada, sobre todo a corto plazo.

Es necesario considerar además, que el tener en cuenta las condiciones reales existentes en la atmósfera libre cercana a la frontera superior de la capa fronteriza, al desarrollar cualquier método de parametrización, disminuye el efecto del carácter no estacionario de la atmósfera (Chnaiman y Foskarino, 1990). Estos mismos autores demostraron la factibilidad de aplicar modelos basados en sistemas de ecuaciones cerrados con ayuda de la «teoría k» de la turbulencia y ecuaciones en su forma estacionaria de balance de energía cinética, velocidad de transformación y la correlación de Kolmogorov para el coeficiente de turbulencia, empleados inclusive en modelos de pronóstico que cubren amplios territorios en latitudes tropicales. Este tema ha sido tratado además en los trabajos de Zeman (1979), Wetzel (1982), Therry (1983), Nieuwstadt (1984) y Arya (1984).

Otra de las problemáticas históricas encontradas al desarrollar métodos de parametrización de la capa fronteriza es lo relacionado con la determinación de la frontera superior de la misma. Para determinar la altura del límite superior de la capa fronteriza se han utilizado criterios de diferentes autores en dependencia del estado de la atmósfera en un momento dado. Cuando existe una inversión elevada varios cientos de metros sobre la superficie subyacente, ha dado buenos resultados el empleo del criterio propuesto por Arya (1981), según el cual la altura de la capa límite se hace coincidir con la base de la inversión. Sin embargo, cuando ésta no existe en los primeros dos kilómetros de altura, no queda claro donde establecer el límite superior de la capa, por lo que propone cuatro variantes de solución: a) Altura hasta donde llega la espiral de Ekman, b) Altura en la que se localiza un primer máximo de velocidad del viento, c) La altura de la inversión nocturna, donde el gradiente térmico se acerca al adiabático seco o presenta una brusca discontinuidad, y d) La altura que alcanza una masa de aire frío, identificada por medio del perfil vertical de la temperatura potencial.

Por otra parte Lajitman (1970), propone en estos casos hacer coincidir la altura de la capa fronteriza con el nivel en el cual el viento real coincide con el viento gradiente.

Zilitinkevich (1970) define que la altura de la capa fronteriza es directamente proporcional a la velocidad del viento e inversamente proporcional al parámetro de coriolis, lo cual se cumple satisfactoriamente en latitudes extratropicales para estratificaciones neutra o estable. A partir de este criterio Tamopolski y Chnaiman (1976) utilizan la siguiente expresión para determinar la altura de la capa límite:

$$hcl = 0,45k_p |V_s| \chi^{-1} \quad (45)$$

donde:

$V_s$  – Viento geostrófico en superficie

$k_p$  – constante de Karman

$\chi$  – coeficiente geostrófico de rozamiento

Los procesos convectivos en latitudes tropicales, generan una interrogante para determinar la altura de la capa fronteriza, dada la presencia de nubes que pueden alcanzar la tropopausa. Gavrillov (1982) propone situarla en la frontera inferior de la inversión de temperatura inmediato superior al nivel de condensación. Falkovich (1979) considera que el nivel de condensación divide la capa fronteriza en una capa «subnubosa» y una «nubosa». Así mismo considera para la capa «subnubosa» el término de «capa de mezclamiento» con su frontera superior en el nivel de condensación, en cambio la «nubosa», admite que es difícil determinar el límite superior por la presencia de movimientos verticales muy fuertes, por lo que propone entonces parametrizarla por separado. Mientras, Chnaiman y Foskarino (1990) consideran que no existe en la actualidad una respuesta definitiva sobre la objetividad de calcular la altura de la capa fronteriza en los modelos de pronóstico o simplemente fijarla por los criterios conocidos.

Se puede afirmar que en la actualidad, se ha llegado a consenso entre los autores de cuales son los métodos más idóneos de cerrar el sistema de ecuaciones de hidrodinámica. Ahora los estudios de capa límite se concentran en seguir perfeccionando las predicciones de los modelos hidrodinámicos de pronósticos empleados en estos días. En este sentido han surgido nuevas interrogantes en relación con la parametrización de la capa límite en dichos modelos.

El modelo del Centro Europeo, por ejemplo, utiliza las teorías de las semejanzas para describir el comportamiento de las variables meteorológicas en la capa superficial, sin embargo se ha comprobado que presenta una tendencia a enfriar demasiado las capas bajas en invierno sobre los continentes. Lo mismo ocurre con el modelo climático de Hadley Center, que predice un enfriamiento excesivo sobre la Antártida durante el invierno austral (Cuxart et al, 2002)

Estas deficiencias pueden estar relacionadas con la presencia de las llamadas «ondas internas» en la capa límite estable. La existencia de estas ondas, aunque no pueden alterar el carácter de la estratificación, si pueden distorsionar las distribuciones de humedad y de temperatura (Derbyshire y Redondo, 1990). Sin embargo, la distinción entre los movimientos turbulentos y estas ondas, así como su interacción entre sí, hasta los días de hoy no es clara (Einaudi y



Finnigan (1993) y Cuxart et al (2002)). Estos últimos llaman la atención además sobre la presencia de flujos de calor ascendentes en un entorno estable, los cuales se han observado en ocasiones y pudieran estar relacionados también con dichas ondas internas. Cabe señalar que la «teoría k» de clausura del sistema de ecuaciones de hidrodinámica no permite este tipo de flujos.

Otro fenómeno al que se le presta atención en la actualidad es a la llamada «intermitencia de la turbulencia» (Mahrt y Howell (1994)), la cual, según estos autores, permite un desacoplamiento entre la parte superior de la capa límite y la capa superficial. Esto hace que la turbulencia a una altura cualquiera esté controlada por la cizalla local (por ejemplo un chorro de los niveles bajos, frecuentes en estratificaciones cercanas a la neutralidad y estables) y la estratificación térmica en este nivel (teoría del local scaling, Nieuwstadt, 1984) y no por la influencia de la superficie, como ocurre para estratificaciones inestables (Yagüe y Redondo (1995)). Esto último adiciona valor a la proposición de Arya (1981) de colocar la altura de la capa límite en el nivel donde se observa un máximo de velocidad del viento.

Las investigaciones de la capa fronteriza en Cuba en los últimos diez años han sido realmente escasas, aunque se han hecho algunos trabajos en los que indirectamente se ha tocado el tema.

Uno de los más importantes llevado a cabo en nuestro país al respecto lo constituye la parametrización de la capa límite desarrollada por Mitrani (1991) en su trabajo «Métodos de cálculo de los procesos físicos en los modelos numéricos de pronóstico del tiempo», tesis doctoral, cuyos resultados fueron aplicados al modelo hidrodinámico del INSMET. Esta parametrización se realizó bajo el principio de calcular los flujos turbulentos de impulso, calor y humedad a partir de los llamados coeficientes de intercambio turbulento o coeficientes de resistencia, ya mencionados al comienzo de este trabajo.

En sentido general en esta reseña se presenta un análisis de la evolución que ha tenido el estudio de la capa fronteriza de la atmósfera desde que se comenzó a tratar la temática por diferentes científicos, fundamentalmente desde la segunda mitad del siglo XIX hasta nuestros días.

Se puede apreciar que a partir de la década de los años 50 (segunda mitad del siglo XX) alcanzan, a nuestro juicio, su mayor esplendor las investigaciones relacionadas con la capa fronteriza, lográndose pasos importantes en el entendimiento de la misma, que sin duda han contribuido al mejoramiento creciente de la calidad de los modelos de pronóstico. Sin embargo cabe señalar que las características físico geográficas de cada región juegan un papel

determinante en el comportamiento de la distribución de las variables meteorológicas en los límites de esta capa, lo cual exige que dichas condiciones sean tenidas en cuenta rigurosamente a la hora de elaborar cualquier modelo de capa fronteriza.

En el caso específico de la isla de Cuba, merece especial atención la circulación de brisas, la cual, como cualquier otro proceso originado por la interacción entre la superficie subyacente y la atmósfera va a ser definitorio en la estructura de su capa fronteriza. Asimismo la fuerte actividad convectiva que en el período lluvioso del año se produce, en gran medida a consecuencia también de la circulación de brisas, debe ser tenido en cuenta en el momento de definir la altura de la frontera superior de la capa, con lo cual se ha de ser muy cuidadoso pues este factor es determinante en la descripción de la estructura de la misma, sin restarle importancia, claro está, a la inversión del alisio, determinante en el comportamiento vertical de la temperatura y por consiguiente en la estructura de la capa fronteriza en algunos horarios del día.

## Conclusiones

Para modelos macroescalares de capa fronteriza, en aras de buscar métodos sencillos de parametrización que funcionen a partir de la información aerometeorológica difundida en los mensajes meteorológicos empleados en el trabajo operativo, es adecuada la consideración de estacionalidad de los procesos, aun cuando estos métodos sean elaborados para zonas tropicales.

Se ha demostrado que los métodos de parametrización elaborados sobre la base del sistema completo de ecuaciones de hidrodinámica ha arrojado resultados superiores a los métodos empleados anteriormente, que calculan los flujos turbulentos con ayuda de los coeficientes de intercambio turbulento, sin embargo para ello es necesario lograr una clausura adecuada del sistema.

En las zonas tropicales, es imprescindible tener en cuenta los procesos convectivos para lograr una mejor comprensión de la estructura de la capa fronteriza en esta zona del planeta, pues estos dificultan la determinación de la altura de la misma, además de que distorsionan el perfil vertical de las variables meteorológicas. Lo anterior demuestra que para elaborar un modelo de capa fronteriza no se puede evadir la necesidad de considerar las características físico geográficas de la zona para la cual se pretende diseñar el modelo.

Aún cuando se ha alcanzado un desarrollo notable en la descripción de los procesos que tienen lugar en la capa fronteriza, existen interrogantes, que se hace necesario descifrar, para continuar mejoran-

do las predicciones de los modelos hidrodinámicos de pronósticos a corto y mediano de las variables meteorológicas y la contaminación atmosférica.

## Referencias

**Aloyan A.E., Yordanov D.Y. y Penenko V.V., 1981:** Parametrización de la capa fronteriza con altura variable-Meteorología y Hidrología, No.1, p. 37 - 46.

**Andre I. C., 1981:** Parametrisation schemes for the planetary boundary layer. A brief review and some general remarks. Workshop on Planetary Boundary Layer Parametrisation, p. 7 - 43.

**Andre I. C., 1983:** Planetary boundary layer parametrisation and turbulence closure. Mesoscale Meteorol. In theor. Observ. And models, p. 651 - 669.

**Anthes R. A., 1985:** Parametrization of physical process in tropical cyclones. International Workshop on Tropical Cyclones, Technical Document WMO/TD N° 74, TMP Report Series N° 18, Vol III, Topics 6.2.

**Arakawa, A., 1972:** Design of de U.C.L.A. General circulation model. Numerical simulation of weather and climate. Tech. Rep. N.7, Dept. Of meteorology, University of Gliberia, Los Angeles, 116 pp.

**Arakawa, A., 1984:** Parametrization of the planetary boundary layer, Departament of de Atmospherivc Science of U.C.L.A., USA, 18 pp.

**Arya S.P., 1981:** Parametrizing the heigth of the stable atmospheric boundary layer, Jour. App. Meteorol., Vol. 20, p. 1192 - 1202.

**Arya S.P., 1984:** Parametric relations for the atmospheric boundary layer. boundary layer Meteorol., Vol.30, No. 1-4, p. 57-72.

**Belov P. N., Boricenkov E. P. y Panin B. D., 1989:** Métodos numéricos de pronóstico del tiempo. Guidrometeoizdat, Leningrado, 376 pp.

**Beniston M. G. y Someria G., 1981:** Use of e detailed planetary boundary layer model for parametrisation purposes. J. Atmos. Sci., Vol. 38, p. 780 - 797.

**Berkovich L.B. y Tkacheva U.B., 1982:** Desarrollo del modelo semisférico diabático de la atmósfera-Trabajos del Centro Hidrometeorológico de Moscú., Edición 242, p. 3 - 20.

**Billard S., Andre I.S. y du Vachat R., 1981:** On the similar functions A and B as determined from the «voves» experiment.-Boundary Layer Meteorol., Vol. 21, No. 4, p. 495 - 507.

**Bisova N. L., Ivanov V. N. y Garguer E. K., 1989:** La turbulencia en la capa fronteriza de la atmósfera. Leningrado, 1989, 263 pp.

**Blackadar A. K., 1962:** The vertical distribution of the wind and the turbulent exchange in e neutral atmosphere. J. Geophys. Res., Vol. 67, N° 80, p. 3095 - 3102.

**Bondarenko V.N. y Chnaiman V.A., 1981:** Descripción cuantitativa de la capa superficial en el modelo de la capa fronteriza de la atmósfera, Trudi IEM, edición 27, p. 12 - 22.

**Boussinesq J., 1887:** Theorie the le coulement tourbillant. Mem. Press. Acad. Sci XXIII, N° 46, 150 pp.

**Burk S. D. y Thomson W. T., 1982:** Operational evaluation of e turbulence closure model forecast system. Mon. Wea. Rev., Vol. 110, N° 11, p. 1535 - 1543.

**Bussinger I.A., Wyngaard I.S., Isume G. y Bradley E.F., 1971:** Flux profile relationship in the atmospheric surface layer, Atmos. Sci., Vol. 28, No.2,p. 181-189.

**Chnaiman V. A., Berkovich L.B. y Foskarino O. V., 1987:** Método de cálculo y valoración cuantitativa de la estructura tridimensional de de la capa fronteriza de la atmósfera. Meteorología y Hidrología, N° 9, p. 98 - 107.

**Chnaiman V. A. y Foskarino O.V., 1990:** Modelación de la capa fronteriza y del intercambio turbulento en la atmósfera, Guidrometeoizdat, Leningrado, 160 pp.

**Chnaiman B. A. y Tarnopolski A. G., 1977:** Estructura de la capa fronteriza baroclínica. Meteorología y Hidrología, N° 3, p. 25 - 31

**Cuxart J., 1997:** Planetary boundary layer modeling: From LES to General Circulation Models. Tesis doctoral. Univ. De Barcelona.

**Cuxart J., Soler R. M., Tarradellas E. y Vilá J., 2002:** Estudio experimental y modelación numérica de los procesos físicos en la capa límite estable. Antarct. Sci., N° 3, p. 310 - 319..

**Deardorff I.W., 1972:** Parametrization of the boundary layer for use on the general circulation model. Mon. Wea. Rev., Vol. 100, N 2, 93 - 106 pp.

**Deardorff I. W., 1974:** Three - Dimensional numerical study of the height and mean structure of the hested planetary boundary layer. Bound Layer Met., Vol 7, N. 1, p. 81 - 106.

**Deardorff I. W., 1985:** Sub - grid scale turbulence modelling. Adv. Geophys., Vol. 28, p. 337 - 343.

**Derbyshire S. H., Redondo J. M., 1990:** Fractals and waves, some geometrical aproaches to stably - stratified turbulence. Anales de Física, serie A, p. 67 - 76.

- Elnaudi F. y Finnigan J. J., 1993:** Wave – turbulence dynamics in the stable stratified boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, N° 50, p. 1841 – 1864.
- Ekman V. W., 1906:** On the influence earth's rotation on ocean currents. *Arkiv Mat. Astron. Fys.*, Uppsala – Stokholm, 2, N° 11, p. 1 – 52.
- Falkovich A.L., 1979:** Dinámica y energética de la zona intertropical de convergencia., *Guidrometeoizdat, Leningrado*, 247 pp.
- Foskarino O. B., 1984:** Modelación de la capa fronteriza en la descripción de los procesos atmosféricos de mesoescala. Física de la capa fronteriza y sus aspectos aplicables, p. 38 – 45.
- Gavrillov V.P., 1982:** Modelos no estacionarios de la capa fronteriza estable., *Guidrometeorologia*, N°3, p. 3 - 55.
- Gruza G. B., 1962:** La turbulencia de macroescala en la circulación general de la atmósfera. *Guidrometeoizdat, Leningrado*, 103 pp.
- Karman Th. Von, 1930:** Meshaniche ahplichkeit und Turbulenz. *Hachr. Gessel. Gottingen, Math – Phys k1*, 215 pp.
- Kazakov A.L. y Lazriev G.L., 1978:** Sobre la parametrización de la capa superficial de la atmósfera y la capa activa del suelo- Edición de la AC de la URSS, Física de la atmósfera y los océanos. T. 14, N°3, p. 257 – 265.
- Kibel I.A., 1984:** Selección de trabajos de meteorología dinámica., *Guidrometeoizdat. Leningrado*, 279 pp.
- Kolmogorov A. N. , 1942:** Ecuaciones del movimiento turbulento en los líquidos. *A. N. URSS, T. 6*, N°1 – 2, p. 56 – 58.
- Korrel A., Panofsky H. A. y Rossi R. J., 1982:** Wind profiles at the Boulder Tower.-*Bound. Layer Meteorol.*, Vol. 22, p. 295-312.
- Krauss E. B., 1972:** Atmosphere Ocean Interaction. *Claredon Press, Oxford*, 294 pp.
- Laijtman D. L., 1970:** Física de la capa fronteriza de la atmósfera. *Guidrometeoizdat. Leningrado*, 342 pp.
- Lauder B. E., Ruce G. I. y Rodi W., 1975:** Progress in the developmen of a Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, N° 3, p. 537 – 568.
- Louis, J. F. 1979:** A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. *Bound Layer Met.*, Vol 17, N 2. 187 – 202 pp.
- Mahrt L. y Howell J. F., 1994:** An adaptive multiresolution data filter: Applications to turbulence and climatic time series. *J. Atmos. Sci.*, N° 51, p. 2165–2178.
- Maihot I., Tourigny P. y Benoit R., 1986:** Some improvements to the Turbulent Kinetic Energy Model of the Planetary Boundary Layer Used at RPN.- *Rept WMO/IGSU World Clim., Res. Programme, , No. 9*, p. 4/47 - 4/49.
- Manton M.I., 1983:** Sobre la parametrización de la difusión vertical en los modelos atmosféricos macroescalares.-*ECMWF Technical report, No. 39*, p. 214 - 221.
- Marchuk G. I., 1984:** Modelación matemática de la circulación general de la atmósfera y el océano. *Guidrometeoizdat, Leningrado*, 320 pp.
- Melechko V. P., Chnerov B. E., Parchina G. V., 1983:** Sobre la sensibilidad del régimen de cálculos climáticos de la atmósfera para con los cambios de algunos parámetros de la capa fronteriza. *Trudi GGO, edición 481*, p. 32 – 40.
- Mellor G. L., 1985:** Ensemble average, turbulence closure. *Adv. Geophys*, Vol. 28, p. 345 – 358.
- Mellor G.L. y Jamada T. 1982:** Development of the turbulent closure model for geophysical fluid problems.-*Rev. Of Geophysics and Space Physics*, Vol. 20, No.4 , p. 851 - 875.
- Mitrani I., 1991:** Métodos de cálculo de los procesos físicos en los modelos numéricos de pronóstico del tiempo», Tesis doctoral. Instituto de Meteorología. La Habana.
- Moeng Chin Hon y Randall D. A., 1984:** Problems in simulating the stratocumulus – topped boundary layer with e third order closure model. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 41, 1588 – 1600.
- Monin A. S. y Kazanski A. B., 1960:** Sobre el régimen turbulento por encima de la capa superficial del aire. *Trabajos del instituto de Geofísica*, N°1, p. 165 – 168.
- Monin A. S. y Obukhov A. M., 1953:** Características adimensionales de la turbulencia en la capa superficial atmosférica. *Trabajos del Instituto de Geofísica*, N°2, p. 223 – 226.
- Monin A. S. y Obukhov A. M., 1954:** Principales leyes del mezclamiento turbulento en la capa superficial atmosférica. *Trabajos del Instituto de Geofísica*, N°24, p. 163 – 187.
- Monin A.C. y Yaglon A.M., 1965:** Hidromecánica estadística, Moscú, 639 pp.
- Nieuwstadt F.T., 1984:** The turbulent structure of the stable nocturnal boundary layer-*J. Atmos.Sci.*, Vol. 41, N°14, p. 2202 - 2216.
- Panchev C. A., 1972:** Teoría de la turbulencia doble. *Guidrologuia y Meteorologia*, Vol. 21, N°2, p. 3 – 12.

- Panofsky H. A., 1985:** The planetary boundary layer. *Adv. Geophys.*, Vol. 28, p. 359 – 385.
- Paulson C. A., 1970:** The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *Jour. App. Met.*, Vol. 9, Nº 6, p. 857 – 861.
- Penenko V.V., 1981:** Metodos de modelación numérica de los procesos atmosféricos., Leningrado, 332 pp.
- Prandtl L., 1904:** Über flüssigkeitshewegung bei sekr keiner Reibung Verhandly. III inter. Mathem. Kongr., Heidelberg, p. 484 – 941.
- Reynolds O., 1883:** An experimental investigation of the circumstances wish determine wether de motion of water shall be director sinous and of the law of recistences in parallels channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 74, p. 935 – 982.
- Richardson L. F., 1926:** The supply of energy from and to atmospheric eddies. *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 686, p. 354 – 373.
- Schlichting H., 1956:** Teoría de la capa fronteriza. Nauka, 705 pp.
- Shuleikin B. B., 1928:** The evaporation of sea water and the thermal intercourse between the sea and the atmosphere. *Gerlands Beitr, Geophys.*, Nº20, p. 99 – 122.
- Shuleikin B. B., 1933:** Física del mar. Gosteizdat, Moscú, 799 pp.
- Shuleikin B. B., 1968:** Física del mar, Nauka, Moscú, 831 pp.
- Spabding D. B., Ng K. N., 1972:** Turbulence model for boundary layer near walls. *Phys. Fluids*, Vol. 15, Nº 1, p. 20 – 30.
- Sverdrup H. U., 1938:** On the evaporation from the ocean. *J. Marine Responce.* 1, Nº1, p. 3 –14.
- Tarnopolski A. G. y Chnaiman V. A., 1976:** Parametrización de la capa fronteriza baroclínica. *Trabajos del Centro Hidrometeorológico de la URSS*, edición 180, p. 32 – 40.
- Therry G. P. 1983:** Lacarrere improving the eddy kinetic energy model for the planetary boundary layer. *Boundary Meteorology*, Vol. 25, Nº 1, p. 63 – 88 .
- Vagner B.G. y Nadechina E.D., 1976:** Empleo de la ecuación diferencial de la velocidad de dicipación en la modelación de la capa superficial de la atmósfera. *Física de la atmósfera y el océano*, T. 12, Nº 4, p. 345 – 355.
- Vagner B.G. y Nadechina E.D., 1979:** La capa fronteriza de la atmósfera en condiciones de homogeneidad horizontal, Leningrado, 135 pp.
- Wetzel P.G., 1982:** Toward parametrisation of the stable boundary layer.-I. *Appl. Meteorol.*, Vol. 21, No.1. p. 35 – 45.
- Wilczac J. M. y Bussinger J. A., 1984:** Large – scale eddies in the unstably stratified atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 41, Nº24, p. 3551 – 3567.
- Wippermann F., 1976:** Theoretical aspects of then planetary boundary layer. In: *Treat Boundary Layer Numer. Weather Predict.*, Bracknell, p. 36 - 76.
- Yagüe C. y Redondo J. M., 1995:** A case study of turbulent parameters during the Antarctic Winter. *Antarct. Sci.*, Nº 7, p. 421 – 433.
- Yordanov. D.L., 1980:** On the law of resistance of a nonstationary planetary boudary layer. *Comptes rendus de l' Academic Bulgare des Sciences*, Vol. 33, No. 10, p. 1357 -1360.
- Zeman O., 1979:** Parametrization of the dinamics of stable boundary layer and nocturnal jets. *J. Atmos. Sci.* Vol. 36, No. 5, p. 792-804.
- Zilitinkevich S. S., 1970:** Dinámica de la capa fronteriza de la atmósfera, *Guidrometeoizdat*, Leningrado, 290 pp.