NUEVA METODOLOGÍA PARA EL ESTUDIO DE LA VARIABILIDAD CLIMÁTICA

Autor: ROSENDO ALVAREZ MORALES

Instituto de Meteorología

RESUMEN

Se dan las condiciones que debe cumplir un conjunto de elementos para conformar un espacio de Banach y de Hilbert. Se enuncian los teoremas que pueden ser aplicados a los espacios de Hilbert para calcular la tendencia de una serie cronológica (meteorológica) de datos. Se demuestra que en una serie de matrices de probabilidades puede ser calculada la tendencia de cada uno de los a_{ij} mediante una curva de mejor aproximación y a partir de ellos construir la matriz de tendencias. Se da un ejemplo de la aplicación del método de cálculo de las tendencias de la rapidez y el rumbo del viento para la estación meteorológica de Casablanca en Ciudad de la Habana, Cuba. Se concluye que esta metodología es valida para el cálculo de la tendencia de cualquiera de las variables meteorológicas y sus combinaciones.

Introducción

En el trabajo tradicional con las tendencias para su empleo en la variabilidad climática se utilizan estadígrafos como los de Wold - Wolfowitz, Spearman y Mann - Kendall (Snyers; 1990), (IPCC; 1994) que resuelven con valores dados la dirección de la tendencia y su significación. No obstante, fuera de estos valores y las direcciones establecidas no ofrecen información adicional, necesario para su buen funcionamiento en series largas de datos.

Es nuestro objetivo establecer en este capítulo una metodología nueva que ofrezca a partir de los datos de base (observaciones horarias, bihorarias o trihorarias) información acerca de la tendencia en forma cualitativa y cuantitativa. Esto es, si tenemos varias estaciones con un valor significativo de la tendencia de acuerdo con los índices anteriores, conocer en cual de ellos el valor de la tendencia es mayor dentro de la misma significación, convirtiéndose al final en una forma cuantitativa de medir esta propiedad.

Para conseguir nuestros objetivos comenzaremos el análisis apoyados en los espacios de Banach y Hilbert, (Maurín, 1972) especialmente estos últimos, atacando la estadística en una forma diferente que basa sus cálculos en la distribución de frecuencias en lugar de en estimadores de tendencia central. Para ello enunciaremos algunas propiedades de los espacios de Hilbert y teoremas con él relacionados que demuestran la validez de la metodología y que pueden verse totalmente en el Anexo 1. Además el tratamiento aplicado en la nueva metodología utiliza las matrices de probabilidades (Rao, 1971), así como conforma matrices de tendencia que determinan el resultado

Materiales y Métodos

La metodología utilizada se basa en una variante del análisis multivariado con una mezcla de espacios matriciales de Banach y de Hilbert, considerando que los conjuntos de datos cumplen con los requisitos que plantean estos espacios.

A continuación pasaremos a describir la metodología empleada, que consta de los siguientes pasos:

- Dado que las variables meteorológicas, en general, se comportan en forma oscilante respecto al tiempo (Straus et. al, 1981) se dividirá la serie en subseries de 5 años consecutivos de datos de manera que todas las oscilaciones queden comprendidas dentro del período que se analiza separadamente. A partir de estos datos se confeccionan tablas de doble entrada que representan un par de variables como puede verse en la Figura 1, donde se ejemplifican los valores de frecuencia obtenidos en un quinquenio de datos, que aquí están representados por los a_{ij}. A partir de aquí se conforma una matriz con los a_{ij} donde los elementos que la conforman son las frecuencias de dos variables tomadas simultáneamente a partir de una tabla de doble entrada.

		Rapidez (m/s)											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N 1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{1,11}$	$a_{1,12}$
R	NNE 2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{2,11}$	$A_{2,12}$
U M	NE 3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{3,11}$	$a_{3,12}$
B O	ENE 4	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{4,11}$	$a_{4,12}$
	E 5	$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{5,11}$	$a_{5,12}$
	ESE 6	$a_{6,1}$	$a_{6,2}$	$a_{6,3}$	$a_{6,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{6,11}$	$a_{6,12}$
	. . .												
	.												
	NNW 16	$a_{16,1}$	$a_{16,2}$	$a_{16,3}$	$a_{16,4}$	....	....	....	....	......	....	$a_{16,11}$	$a_{16,12}$

Fig. 1 Tabla de doble entrada procesada en frecuencias relativas para determinar los coeficientes a_{ij}.

Aquí aplicamos el Teorema de la Proyección Ortogonal enunciado anteriormente y el hecho que " Cualquier espacio separable de Hilbert h es contable dimensionalmente".

También aplicamos el hecho que "Un conjunto W en un espacio lineal es llamado convexo si para cada par de puntos $u,w \in W$, contiene también el segmento que une esos puntos, $Z = (1-t)u + tw \in W$ para todo $0 \leq t \leq 1$", (Maurin, 1973) condición cumplimentada por la frecuencia y de paso ya que R^n es un espacio completo y que un espacio completo unitario es un espacio de Hilbert, tendremos que la matriz de frecuencias por nosotros conformada es un espacio de Hilbert.

- También cada a_{ij} representa la probabilidad de ocurrencia del elemento con el par de características dado en cada una de las subseries del conjunto de datos.

Para esta condición contamos con los teoremas de la Forma General de las Funciones Lineales, especialmente el que dice "Dado un mapeo lineal continuo de un espacio normado (en particular un espacio de Hilbert) X en otro espacio normado X_1, el espacio X/R y X_1 son isomorfos, $(R = \{x \mid Ax = 0\})$". ", (Maurin, 1972)

- Se obtienen las matrices de cada una de las subseries de 5 años de la serie general de datos y se conforma una matriz multiple donde cada elemento está formado por los n a_{ij} procedentes de las matrices de cada uno de los quinquenios.

Aquí nos ajustamos al Teorema del Gráfico Cerrado de Banach y a su Teorema 1, al Teorema de Beppo - Levi y al Teorema 1 de Kolmogorov. ", (Maurin, 1972; Koroliuk, 1981)

- Sobre la matriz múltiple de la serie se calcula la curva de mejor aproximación para cada a_{ij} y teniendo en cuenta que una serie cronológica puede descomponerse en un movimiento a largo plazo o tendencia, movimientos sistemáticos a corto plazo y componentes aleatorios y que una serie meteorológica puede ser descompuesta en oscilaciones de pequeña escala, de mesoescala, sinópticas, globales, estacionales, interanuales (cuasi - bienales particularmente en la atmósfera ecuatorial), ENOS, autooscilaciones anuales de las ramas Norte de la corriente del Golfo, intercentenales, de largos período, además de los efectos de feedback (Kegan, 1995); se decidió aproximar cada a_{ij} por una curva que contuviera un término lineal y varios que contuvieran términos de oscilación, llegando a la curva:

$$y = ax + b\,sen\,\theta + c\cos\theta + d\,sen\,2\theta + e\cos 2\theta + ...$$

En todos los casos se fijo el ajuste superior a 0.8 de correlación.

Aquí aplicamos el Teorema 2 de Kolmogorov haciéndolo menos restrictivo adaptando las condiciones a la medida exterior de Lebesque, el Teorema del Gráfico Cerrado de Banach y también el Teorema de Kolmogorov para los espacios normados (Koroliuk, 1981; apostol, 1972).

Hecho esto aplicamos el Segundo Teorema Fundamental, el Teorema de Bohr y el Teorema de Weyl para realizar la expansión

- Desechando los términos oscilatorios en las series de cada uno de los a_{ij}, (Kendall et. al, 1976) ya que una oscilación tiene el mismo valor al principio y al final, se toma el coeficiente del término lineal en la aproximación como la tendencia (pendiente de la recta) de cada aij y el conjunto de todas las tendencias de las a_{ij} conforma la matriz de probabilidad de tendencia para la serie.

Aunque este paso es válido desde el punto de vista físico, también lo es sí aplicamos las condiciones acerca de las Funciones sobre Espacios Homogéneos. (Maurin, 1972; Maskoshevich, 1970).

- A partir de las matrices obtenidas para todas las variables que se estudian se obtienen las cartas bidimensionales de cambio de variables, así como de las superficies de tendencias.

Discusión

Una vez planteada la metodología pasamos a describir una de las matrices de tendencias obtenidas, recordando siempre que el proceso lleva implícito la frecuencia de ocurrencia de dos valores simultáneos, esto es, su repetibilidad en el tiempo. Como ejemplo tomemos la matriz rapidez vs rumbo del viento en la estación meteorológica de Casablanca, con 90 años de datos bihorarios, que fueron divididos en 18 quinquenios desde 1906 hasta 1995.

La variable viento es considerada como un vector, el único de las variables meteorológicas base y que por lo tanto su comparación con las demás resulta un tanto difícil. Sin embargo, si tomamos una matriz de frecuencias provenientes de una tabla de doble entrada podemos trazar una carta que representa la variación de la rapidez y el rumbo simultáneamente (Alvarez, 1983) provocando una transformación del espacio E_2 en otro E_1, donde el último representa la probabilidad de ocurrencia de ambas magnitudes simultáneamente.

- En la figura 2 podemos ver la carta característica de tendencias de rapidez vs rumbo del viento para la estación meteorológica de Casablanca, obtenida a partir de 90 años de datos procesados según la metodología explicada. En ella podemos ver que, en general, la tendencia es a que aumente el número de casos de valores bajos de la rapidez del viento (entre 1 y 3 m/s) para rumbos entre el N y el ESE con énfasis especial en los rumbos ENE -3 m/s y E -1 m/s; por otra parte, a que disminuya rápido encuentra mínimos en el NE -4 m/s, NE -6 m/s, E -4m/s y un lugar alejado en el NNW -4 m/s.

En general, podemos decir que hay una tendencia clara a la disminución de los W para casi todos los valores de rapidez del viento detectados.

también conocemos las horas del día a la que se producen esos cambios. También los resultados fueron comprobados con una muestra independiente de 4 años de datos, (1995 1998) arrojando errores menores que el 1% en frecuencia para cada uno de los a_{ij}, con el 80% de los casos sin error.

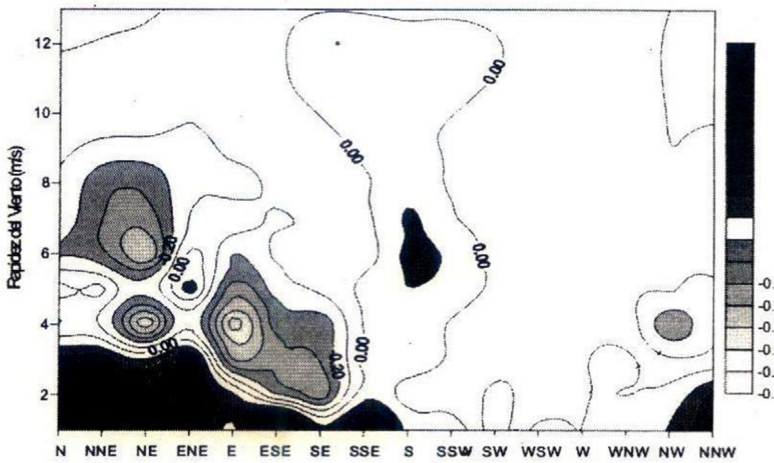

Fig. 2 Carta característica de la tendencia de la rapidez vs rumbo del viento para la estación meteorológica de Casablanca.

La importancia fundamental de esta matriz radica en que entra en el modelo de pronóstico de Berlyand-Alvarez (1978) utilizado para el cálculo de las concentraciones de contàminantes emitidos por una fuente puntual y que será utilizada para los cálculos de dispersión.

Comprobación

Los resultados obtenidos para la estación Casablanca con la matriz de tendencia de las variables temperatura vs horas del día fueron comparados con la tendencia calculada de la temperatura resuelta con los métodos tradicionales (Snyers, 1990) arrojando resultados similares que implicaban el aumento de la temperatura ambiente pero considerando el aumento de los valores bajos y no de los máximos con la ventaja que en el caso que nos ocupa

Concluciones

De lo anteriormente expuesto pueden extraerse varias ventajas del método utilizado como son:

- Nos brinda un estudio cuantitativo de la tendencia, lo que permite, rectificar los diagnósticos de los patrones de dispersión de sustancias contaminantes teniendo en cuenta el efecto que la variabilidad climática realiza sobre ellos.
- Con la aplicación de matrices detalladas de las variables meteorológicas en estudio, pueden analizarse los cambios de las mismas para pequeños rangos, lo que implica que no solo se conocerá el comportamiento de la media y los valores extremos como comunmente se hace, sino que puede conocerse si una tendencia se debe al au-

mento de los rangos de valores de algunas variables y a la disminución de otros.

- El error hallado para el pronóstico de frecuencias a 4 años vista es muy pequeño pudiendo convertir la metodología en un método de pronóstico con la reiteración y suma de las matrices de tendencia.
- Esta metodología brinda la no premisa de la prueba de homogeneidad de la serie, lo que facilita el trabajo y lo hace mas sencillo. Además se trabajó directamente con los cambios de las variables y no con índices que pueden introducir incertidumbres en la determinación de tendencia.
- El trabajo con matrices que combinan variables meteorológicas como la de rumbo - rapidez del viento, temperatura - humedad, etc. permiten introducir el análisis multivariado en la tendencia de varias variables simultáneamente. Por ejemplo en el caso de la matriz rumbo-rapidez del viento, puede simularse una transformación $E_2 \rightarrow E_1$ lo que permite sacar conclusiones del viento como un escalar. En el caso de la matriz temperatura - humedad permite realizar un análisis de la mayor parte de las condiciones de confort que pueden ser completadas combinando esta matriz con la de viento mediante un producto matricial que resuelve la probabilidad condicionada de ambos eventos.

Referencias

Alvarez, R. (1978) Tesis de Grado de Candidato a Doctor en Ciencias Físico - Matemáticas. "Estudio de la dispersión de contaminantes en la atmósfera de Cuba." IFA. A.C. de la URSS. 204 pp.

Alvarez, R. (1983) Nuevo método de empleo de los datos de viento para su aplicación a los problemas de la contaminación del aire. Ciencias de la tierra y el Espacio. 139- 241 pp.

Apóstol, T. A. (1969) Análisis Matemático. Edición Revolucionaria, Habana 234 pp

Berlyand, M. E. (1975): Sobriemiennyie probliemy atmosfiernoi diffuzii i zagriaznieniia atmosfiery [en ruso].

Editora Guidromietieoizdat. Leningrado, 412 pp.

IPCC (1994) Radiactive forcing of climate change. UMO - UNEP. IPCC - XI Doc.3 Part I. Ginebra. Suiza 310 pp.

Kendall, M & Stuart, A. (1976) The Advanced theory of statistics. Vol 3. Designand Analysis and Time series. Charles Griffin & Co Lmted. London.

Koroliliuk, V. S. (1981) Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática. Ed. Mir. Moscú. 580 pp.

Markosevich, A. (1970) Teoría de las funciones analíticas. Tomo II. Editorial Mir. Moscú. 646 pp.

Maurin, K. (1972) Methods of Hilbert spaces. Warszawa. Polonia. 553 pp.

Rao, Radhakrishna (1971) Inverse of Matrices and its pplications. John Wiley Sons. New York, 240 pp.

Snyers R. (1990) On the Statistical Analisys of Series of Observations. WMO Publ. No. 415. Geneva.

Straus, David M. Y Milton Halem (1981) "A stochastic Dinamical Approach to the Study of the Natural Variability of The Climate. Monthly Weather Review 3: 407 422.

Anexo1

Espacios de Hilbert.

Un espacio vectorial lineal L es un cojunto no vacío si es cerrado respecto a la adición vectorial y a la multiplicación por un escalar, tal que para cualesquiera elementos x, y, z L y cualesquiera números reales a y b, las operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

- La operación de adición satisface

$$x + y = y + x,$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

existe un único elemento 0 en L tal que $0 + x = x,$

para cada x en L, existe un único $-x$ tal que $x + (-x) = 0$

- La operación de multiplicación para un escalar satisface

$$a\,(bx) = (ab)\,x$$

$$1x = x$$

- La operación de adición y multiplicación por un escalar satisface

$$a\,(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

Un producto interior (escalar) es una función de valor real sobre el espacio L, señalado por $(x.y)$, tal que lo siguiente es cierto:

$$(x.y) = (y.x)$$

$$(x + y.z) = (x.z + y.z),$$

$(ax.y) = a(x.y)$ para cualquier número real a,

$(x.x) \geq 0$ y $(x.x) = 0$ si y solo si $x = 0$

Se dice que dos elementos x y y son ortogonales sí $(x.y) = 0$. A partir del producto interior, definimos

$\sqrt{(x.x)}$ como la norma de x, señalada con frecuencia por $\|x\|$.

Ella satisface las siguientes condiciones

$$\|x\| \geq 0 \text{ y } \|x\| = 0 \text{ sí y solo sí } x = 0,$$

$$\|ax\| = |a|\,\|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Entonces $||x-y||$ es definido como la distancia entre x y y y es llamada la métrica del espacio. Es fácil ver que una combinación finita de variables aleatorias con media cero es un espacio vectorial lineal y $E(XY)$ es un producto interior.

Una secuencia x_n se dice que es una secuencia de Canchy sí

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n - x_m\| = 0$$

Un espacio de Hilbert, H, es un espacio completo de productos interiores de vectores lineales en el sentido que el límite de cada secuencia de Canchy es también un punto en el espacio, tal que el espacio es cerrado. Supongamos que H_1 y H_2 son subespacios de un espacio de Hilbert H. Entonces la suma de H_1 y H_2 es definida como el conjunto

$H_1 + H_2 = \{x + y: x \in H_1\ y\ y \in H_2\}$

Si H_1 y H_2 son subespacios ortogonales en el sentido que cada elemento $x \in H_1$ es ortogonal a cada elemento $y \in H_2$, entonces $H_1 + H_2$ es cerrado y por lo tanto un espacio de Hilbert. En este caso, escribiremos la suma como $H_1 \oplus H_2$.

Aquí debemos introducir el siguiente teorema:

Teorema de la Proyección: Si H_0 es un subespacio de un espacio de Hilbert H, entonces $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$, donde $H_0^{\perp}$ es el complemento ortogonal de H_0. Cada elemento $x \in H$ está unívocamente expresado como

$x = p(x) + [x + p(x)]$,

donde $p(x) \in H_0$, $[x + p(x)] \in H_0^{\perp}$ y

$$\|x - p(x)\| = min_{y \in H_0} \|x - y\|$$

El punto $p(x)$ es llamado la proyección ortogonal de x sobre H_0 y $[x+p(x)]$ es el resuduo de x desde H_0

Como puede verse este teorema es la base de la llamada teoría de las oscilaciones muy utilizada para tratar problemas de difusión, y nos permite realizar una descomposición de una serie de datos en varios términos sin salir del espacio de Hilbert.

Visto lo anterior podemos plantear un antecedente de la aplicación del espacio de Hilbert en el pronóstico.

Una agrupación lineal es un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert tal que si x y y están en el subconjunto, entonces $(ax + by)$ es también un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert para cualesquiera números reales a y b. Sea z_i un proceso estacionario con media cero. Bajo el producto interior $(z_t, x_i) = E(z_t, x_i)$, es conocido que la agrupación lineal cerrada H señada por $H = L\ (z_i{:}t{=}0{\pm}1, {\pm}2, \ldots\ldots)$ es un espacio de Hilbert. $E(z_t, x_i)^2$ es la norma de distancia entre los elementos z_t y x_i en el espacio.

En el análisis de series temporales, estamos interesados en pronosticar Z_{N+l}, para algún $1 \geq 1$, basados en el conocimiento de la historia pasada $\{Z_t: t \leq N\}$. Consideremos una agrupación lineal cerrada L $\{Z_t: t \leq N\}$. Esta claro que $L\ \{Z_t: t \leq N\}$ es un subespacio de H. Entonces, hallando el mejor pronóstico lineal de Z_{N+l}, el cual es un elemento en H, basado en su historia pasada, es equivalente a hallar un elemento $\hat{Z}_N(\ell)$ en $L\ \{Z_t: t \leq N\}$ tal que el error medio cuadrático.

$$E\left(z_{N+l} - \hat{Z}_N(\ell)\right)^2 = \min_{x \in \{Z_t, t \leq N\}} E\left(Z_{N+l} - x\right)$$

De acuerdo con el anterior teorema de la proyección, el mejor pronóstico lineal de Z_{N+l} es simplemente su proyección ortogonal sobre el subespacio $L\ \{Z_t: t \leq N\}$. Bajo el criterio de error mínimo cuadrático medio deducido del producto interno $E(z_t x_i)$, esta proyección ortogonal es la misma que la esperanza condicionada $E[E_{N+l} | z_t : t \leq N$. También, por el mismo teorema, el error de pronóstico $\left(z_{N+l} - \hat{Z}_N(\ell)\right)^2$ está en el espacio $L^{\perp}\{Z_t: t \leq N\}$ y por lo tanto es ortogonal al subespacio $L\{Z_t{:}t \leq N\}$.

A continuación establecemos algunos teoremas que serán necesarios para poder aplicar los criterios de los espacios de Hilbert a la nueva metodología.

Definición: Decimos que una secuencia (U_n) de elementos de un espacio métrico X converge a un elemento u que pertenece a este espacio si $\lim_{n\to\infty} d(u_n u) = 0$; entonces escribimos $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, o más corto $u_n \to u$ El elemento u es llamado el límite de la secuencia (U_n).

Es fácil entender que aquellos espacios métricos en los cuales cada secuencia convergente tiene un límite son especialmente importantes para su aplicación al análisis. Tales espacios son llamados completos.

Definición: Un espacio normado completo es llamado un Espacio de Banach.

Definición: Un espacio completo unitario es llamado un Espacio de Hilbert.

Como ejemplos podemos ver que:

1.- El espacio R^l - la línea recta. El teorema estableciendo que R^l es completo es llamado teorema de Cauchy en la teoría de secuencias.

2.-El espacio R^n. La prueba de que es completo se resuelve en cálculo elemental aplicando el teorema de Cauchy n veces.

Teorema. El producto Cartesiano de un número finito de espacios completos es un espacio completo.

Un conjunto w en un espacio lineal es llamado convexo si para cada par de puntos $u,w \varepsilon w$, contiene también el segmento que une esos puntos, $z = (1-t)u + tw \in W$ para $0 \leq t \leq 1$.

El TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO (Banach). Sea T un mapeo lineal desde un espacio de Frechet E a un espacio de Frechet F, con dominio D(T) el cual es un conjunto de segunda categoría en E y sea el gráfico G(T) de T cerrado. Entonces:

1º. D(T)=E, o sea, el mapeo T está definido sobre todo el espacio E,

2º. el mapeo T es continuo.

TEOREMA 1 (Banach). Sea T un mapeo lineal continuo de un espacio de Frechet E en un espacio de Frechet F, tal que el rango $R(T)=T(E)$ es de segunda categoría en F. Entonces $T(E)=F$ y , para cada secuencia $(f_n) C F$, tendiendo a cero, existe una secuencia $(e_n) C E$ tal que en 0 y $Te_n = f_n$.

TEOREMAS DE BEPPO-LEVI

Teorema 1. Cada conjunto cerrado convexo en un espacio de Hilbert contiene un elemento único con la norma mínima.

Teorema de la Proyección Ortogonal. Si h_l es un subespacio entonces cada vector $u \varepsilon h$ tiene una y solo una representación $u = u_1 + u_2$ donde $u_1 \varepsilon h_1$ y $u_2 \perp h_1$. El vector u_1 da la mejor aproximación de u entre todos los vectores del subespacio h_1.

Teorema 2. Cualquier espacio separable de Hilbert h es contable dimensionalmente.

TEOREMAS DE LA FORMA GENERAL DE LOS FUNCIONALES LINEALES.

Teorema 1. Para un mapeo lineal A de un espacio normado en otro espacio normado las siguientes proposiciones son equivalentes:

1º A transforma secuencias convergiendo a cero en secuencias acotadas.

2º A es continua en un punto (por ej. en $u=0$).

3º A satisface la condición de Lipschitz con C independiente de u.

$$||Au|| \leq C||u||$$

4º A es continua en cada punto.

Teorema 2. Dado un mapeo lineal continuo de un espacio normado (en particular un espacio Hilbert) X en otro espacio normado X_1, el espacio X/R y X_1 son isomorfos, $(R = \{x | Ax=0\})$.

Teorema 3. Cada funcional lineal continuo sobre un espacio de Hilbert es igual a un producto escalar.

TEOREMA DE HAHN-BANACH. Dado un funcional lineal acotado f definido en subespacio lineal M de un espacio normado X, existe una extensión preservadora de la norma de f en todo el espacio de X.

TEOREMA DE BAIRE. Cada espacio métrico completo es de segunda categoría.

TEOREMA 1 (de Kolmogorov). (Koroliuk, 1981) Supongamos que las funciones $F_{i1},...,_{ik}(A_1,...A_k)$ están definidas para $t_1,...,t_k \varepsilon T$, y $A_1,.....A_k$ $\varepsilon B(x)$ es la σ-álgebra de conjuntos borelianos en el espacio euclidiano de dimensiones finitas X. Entonces, para que exista un proceso aleatorio para el cual $F_{t1},..._{2k}(A_1,...A_k)$ sean distribuciones de dimensiones finitas es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

I. Para $t_1,t_2,...t_k$ fijados la función $F_{t1},_{t2},...t_k(A_1,...A_k)$ es una distribución conjunta de k magnitudes aleatorias.

II. $F_{t1},...t_k(A_1,...A_k) = Fti1,...tix(A_{i1},..A_{ik})$, cualquiera que sea la permutación $i_1,...i_k$ de los números $1,2,...,K$.

III. Si X es el dominio de los valores del proceso, entonces :

$$F_{t1},...t_{k-1},t_k(A_1,...A_{k-1},X) = F_{t1},...t_{k-1}(A_1,...A_{k-1}).$$

A título de espacio probalístico se puede elegir el espacio {Ω,G,P}donde Ω es el conjunto de todas las funciones $w(t)$ definidas en T que toman sus valores de X; la σ-álgebra Ω es la σ-álgebra mínima generada por conjuntos cilíndricos, es decir, por conjuntos del tipo:

$$\{W \mid W(t_1) \varepsilon A_1,...w(t_k) \varepsilon A_k\} = Ct_1,...t_k(A_1,...A_k)$$

y la medida P se determina por la correlación:

$$P(Ct_1,...t_k(A_1,...A_k)) = Ft_1,...t_k(A_1,...A_k).$$

El proceso aleatorio buscado en este espacio probabilístico se determina mediante la igualdad:

$$\phi(t,w) = w(t)$$

Las funciones $\phi(t,w)$ con w fijado se denominan funciones muestrales del proceso aleatorio.

TEOREMA 2. Con el fin de conseguir que para el proceso dado exista un proceso estocástico equivalente en amplio sentido, cuyas funciones muestrales pertenecen al conjunto $F \subset \Omega$. es necesario y suficiente que $P^*(F) = 1$, donde P^* es una medida exterior construida según la medida P que fue determinada en el teorema de Kolmogorov:

$$P^*(G) = \inf_{UC \supset G} \sum P(G_k)$$

donde Ck son conjuntos cilíndricos; G es un conjunto arbitrario de Ω.

Este teorema puede hacerse menos restrictivo adaptando las condiciones a la medida exterior de Lebesgue. (Apóstol, 1969).

Teorema (Kolmogorov). La clase de espacios linealmente convexos en los cuales existen entornos acotados de cero coincide con la clase de los espacios normados.

1.- Cada conjunto finito $\{pu_1 ... \varphi_n\}$ es acotado.

2.- Cada conjunto compacto es acotado.

3.- Cada conjunto condicionalmente compacto es acotado (Un conjunto se llama condicionalmente compacto si su envoltura es compacta).

4.- La unión de una familia finita de conjuntos acotados es acotada.

5.- Los elementos φ_i los cuales son términos de cualquier secuencia convergente (φ_i) forma un conjunto acotado.

Ejemplo de operador Hermítico.

1.- Si ß es un espacio separable de Hilbert, entonces su base (u_i) se asocia con cada operador líneal definido sobre el todo de ß una matriz $a_{ki} = (Au_i, u_n)$. Si A es un operador Hermítico, $A = A^*$, entonces $a_{ki} = (Au_i, u_n) = (u_i, Au_k) = \overline{a_{ik}}$. Entonces la base asocia operadores Hermíticos con matrices Hermíticas (a_{ik}), donde $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$. Es el caso de espacios de Hilbert reales $a_{ik} = a_{ki}$ y nos encontramos con una matriz simétrica.

Segundo Teorema Fundamental. Cada función cuasiperiódica puede ser aproximada uniformemente por combinaciones lineales de la forma

$$\sum_{\gamma=1}^{n(8)} h_\gamma^\varepsilon \text{ donde } \sigma h_\gamma^\varepsilon \in H_\gamma$$

para $\sigma \in G$ no obstante, esta vez las funciones h_γ^ε dependen de ε:

$$\left| f - \sum_{\gamma=1}^{n(\varepsilon)} h_2^\varepsilon \right| < \varepsilon$$

Teorema (Bohr). Cualquier función cuasiperiódica puede:

1.- Ser expandida en el sentido de la métrica en series de Founer de funciones exponenciales $e^{i\lambda_\gamma t}$.

2.- Aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos de la forma $\sum_\gamma c_\gamma(\varepsilon) e^{i\lambda_\gamma t}$

Teorema (Weyl). Cualquier representación $\sigma \rightarrow U(\sigma)$ de un grupo compacto G puede ser descompuesta en una suma directa (generalmente incontable) de representaciones finito - dimensionales irreducibles $\sigma \rightarrow U^\gamma(\sigma)$

Funciones sobre espacios homogéneos

I.- Cada función continua sobre S_2 puede ser expandida en una serie ortogonal (convergente en) de funciones pertenecientes a subespacios invariantes finitos-dimensionales (irreducibles).

II.- Cada función continua sobre S_2 puede ser uniformemente aproximada por combinaciones lineales (con coeficientes dependientes de la seguridad de la aproximación) de funciones pertenecientes a subespacios invariantes finitos-dimensionales (irreducibles).

Todos los teoremas descritos, así como las definiciones proceden de la literatura, de los textos de Maurin, (1972), Koroliuk, (1981), Kendall et. al, (1971) y Markosevich (1970).

ABSTRACT

Conditions are given for a set of elements to fulfill in order to constitute a Banach and Hilbert space. Theorems are enunciated that can be applied to Hilbert spaces to calculate the tendency in a time series of data (meteorological data). It is proved that in a series of probability matrixes the tendency can be calculated for every aij through a best-fit curve, and from there a tendency matrix can be built. An example is given of the application of the method to the calculation of the tendency of wind speed and direction on Casablanca meteorological station at Havana City, Cuba. It is concluded that this methodology is valid for the calculus of tendency of any meteorological variable and its combinations.