

Simulación de un vórtice de velocidades barotrópicas mediante una técnica de refinamiento adaptativo

Simulation of a barotropic vortex's velocity components through an adaptive mesh refinement technique

Lic. Evelyn Elisa Martínez Sabari | *evelyn@instec.cu* | Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas (INTEC)

MSc. Maibys Sierra Lorenzo | *maibys.lorenzo@insmet.cu* | Centro de Física de la Atmósfera, Instituto de Meteorología

Recibido: diciembre 13 de 2014; aceptado: marzo 30 de 2015.

Resumen

Se muestra la factibilidad del uso de técnicas de refinamiento adaptativo de rejillas en la modelación de características meteorológicas de tipo vorticial. Para ello, se emplea un método adaptativo que combina las funciones *wavelet* con las diferencias finitas en la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales tomados como ejemplos. La utilización de las funciones *wavelet* permite obtener una solución con mayor resolución solo donde se necesite, disminuyendo el costo computacional; la solución obtenida, con el método empleado, se compara con la solución del modelo mediante el método de diferencias finitas y se evidencian las ventajas de la herramienta propuesta. La incorporación de esta alternativa en los modelos de pronóstico numérico del tiempo permitiría un estudio más detallado de los fenómenos meteorológicos de escala local, con menos recursos computacionales.

PALABRAS CLAVE: Refinamiento adaptativo de rejillas, *wavelet*, diferencias finitas.

Abstract

It is shown the feasibility of adaptive mesh refinement techniques to represent meteorological vortex cha-

acteristics. The technique used combines the wavelet functions with finite differences to solve the set of partial differential equations belonging to the examples taken. Through the use of wavelet it can be obtained solutions with more resolution just in the needed place, and in this way lessening the computational cost. The obtained solution was compared to the solution of the model by finite differences method, showing the advantages of the proposed tool. The incorporation of this alternative to the forecast models, will allow a more detailed study of the local phenomenon in Meteorology, using less the computational resources

KEYWORDS: Adaptive mesh refinement, *wavelet*, finite differences.

Introducción

Los fenómenos meteorológicos presentan distribuciones que pueden abarcar escalas, tanto espaciales, como temporales; asimismo, los procesos multiescales que en estos se desarrollan pueden interactuar o no entre sí. Ambos aspectos afectan la precisión de los modelos de pronóstico numérico y las

investigaciones relacionadas con los fenómenos de escala local, por lo cual se plantea la necesidad de implementar métodos numéricos que reflejen las discontinuidades, las variaciones bruscas a escala local de las variables meteorológicas y la interacción de los procesos meteorológicos con las diferentes escalas, con un empleo racional de los recursos computacionales.

Entre las herramientas más usadas para atenuar los problemas mencionados están las que utilizan métodos de *refinamiento en mallas adaptativas* (RMA), entre las cuales pueden destacarse las descritas en (COLELLA, 2009) (CHRISOCHOIDES, 1993) (DEBREU, 2002) (DEITERDING, 2008) (DOMINGUES, 2009) (Xue, 2009). Estos métodos plantean el ajuste de la resolución en una rejilla de forma local, mediante el uso de un criterio matemático o físico (JABLONOWSKI, 2004) (JABLONOWSKI, 2006); de este modo, se pueden crear rejillas refinadas o removerlas una vez que no sean necesarias. Entre las primeras estrategias, se tiene la de Berger y Olinger, conocida como método BOSAMR (Berger and Olinger Structured Adaptive Mesh Refinement) (BERGER, 1984), con la cual se forman niveles de resolución en una malla de forma jerárquica; estos pueden contener varias rejillas que, a su vez, pueden rotar según el lugar donde se necesite refinar (HYMAN, 2014). Un ejemplo relevante basado en esta idea es el AGRIF (Adaptive Grid Refinement In Fortran), un módulo creado en Fortran 90 para el refinamiento y la integración de ecuaciones diferenciales en mallas de forma adaptativa, ampliamente descrito en (DEBREU, 2002) (DEBREU, 2008), que forma parte del modelo mesoescalar ARPS (Advanced Regional Prediction System). Lo relevante del AGRIF es el uso de los punteros del Fortran 90 con vistas a direccionar las variables entre rejillas con diferente nivel de resolución.

Los trabajos que utilizan el método BOSAMR, como los presentados por (BERGER, 1984) (BERGER, 1989) (BERGER, 2010) (DEBREU, 2008) (DEBREU, 2008) (SKAMAROCK, 1989), presentan grandes ventajas, puesto que, como se ha mencionado, permiten obtener una mejor representación de los

fenómenos a escala local y de la interacción entre estos, gracias a la adaptatividad ofrecida por los mismos con respecto a los métodos clásicos sobre mallas regulares. Además, el método escogido para solucionar las ecuaciones diferenciales es el de las diferencias finitas, cuyos esquemas son más simples y menos pesados (desde el punto de vista computacional) que los propuestos por otros métodos adaptativos como elementos finitos; por tanto, pueden incluirse en los modelos de pronóstico numérico del tiempo existentes, dado que en cada rejilla de la jerarquía se aplica localmente las diferencias finitas. Como desventaja se constata que se repite la información para una misma zona, es decir, existen regiones en la malla en las cuales se tiene información con diferentes niveles de resolución (BERGER, 1984) (SKAMAROCK, 1992), lo cual propicia que, desde el punto de vista computacional, se consume mucho espacio en memoria; además, para determinar dónde es necesario refinar se requiere la integración de las ecuaciones con un paso distinto, algo que resulta más costoso.

En aras de solucionar estos puntos débiles se utilizan las funciones *wavelet*, las cuales son funciones bien localizadas que permiten la descomposición de las señales en espacio (tiempo) y escala (frecuencia), y permiten la detección de procesos de poca duración con altas frecuencias en las escalas pequeñas y, a su vez, el estudio de fenómenos de baja frecuencia y larga duración. Asimismo, mediante algoritmos computacionales eficientes permiten la representación jerárquica en multinivel de las señales, lo que se conoce como *análisis multiresolución* (AMR). Esto último es una transformación que se produce entre dos tipos de datos mediante la transformada *wavelet* discreta (TWD). A partir de una señal s_j con un nivel de refinamiento j se obtiene una descomposición en niveles con una resolución menor o igual que j .

$$s_j^j \xrightarrow{TWD} \overrightarrow{TWD} s_m^j \{s^0, d^0, d^{-1}, \dots, d^{j-1}\}$$

Donde s_0 es la representación más gruesa de la señal y d_k es la diferencia de información entre un nivel de refinamiento k y $k + 1$. Esta representación tiene

como ventajas que no existe un aumento de la información que se almacena, puesto que $s_j = s_{j-1} + d_{j-1}$ y la señal en su más alta resolución puede recuperarse de forma exacta, porque el proceso de transformación es reversible. Además, los coeficientes d_k , también conocidos como coeficientes de detalle, pueden ser utilizados como indicadores de refinamiento. Si d_k tiene un valor alto, significa que entre los niveles k y $k+1$ hay una diferencia de información grande y para obtener una mejor descripción del proceso que se estudia, es necesario incrementar la resolución, mientras que en el caso contrario es suficiente (SIERRA, 2011).

En este sentido, entre las investigaciones más relevantes pueden citarse las realizadas por Holström en 1997 (HOLSTRÖM, 1999), donde se propone un método mediante las funciones *wavelet* y el método de diferencias finitas para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales en mallas adaptativas. Sobre la base de este trabajo, Margarete Oliveira, en su tesis doctoral (OLIVEIRA, 2001), valida discretizaciones biortogonales en ecuaciones diferenciales parciales con el uso de las bases *wavelet*. Hace énfasis en aquellas ecuaciones que presentan interés para la meteorología y, de esta forma, soluciona la ecuación de advección mediante la combinación de las funciones *wavelet* con el método de diferencias finitas y resuelve el modelo de *aguas someras* por mediación de un esquema Petrov-Galerkin. Un trabajo similar es realizado en Cuba por (ÁLVAREZ, 2001), pero para la ecuación de Schrödinger.

El presente trabajo tiene como objetivo principal simular la evolución de un vórtice de velocidades barotrópicas con una técnica de refinamiento adaptativo. El método escogido utiliza los coeficientes de detalles obtenidos de la TWD para conocer las zonas donde se necesita refinar y el método de diferencias finitas para la integración de las ecuaciones diferenciales del modelo seleccionado (el de *aguas someras*) en la malla adaptativa, la cual es generada mediante un esquema de subdivisión

interpolatoria descrito por (DUBUC, 1990). Las bases *wavelet* manejadas en la obtención de los coeficientes de detalles y en la generación de la malla adaptativa fueron *wavelet* interpolatorias. Con la obtención de mallas adaptativas en cada paso de integración, no solo es posible lograr un nivel de detalle mayor en los lugares que se necesita, sino que se logra disminuir el costo computacional.

El modelo mediante el que se describe la evolución de las componentes de la velocidad del vórtice es el de *aguas someras*, por ser bien conocidos sus soluciones numéricas para mallas regulares y el comportamiento de las variables que relaciona (la velocidad del viento; la altura geopotencial, en el caso de la atmósfera; y la sobre elevación del nivel del mar, para el océano). Este modelo se utiliza, además, para mostrar el comportamiento de nuevas técnicas numéricas en la meteorología.

Una de las principales expectativas es la aplicación de estas técnicas en los modelos numéricos de pronóstico del tiempo, puesto que con el aumento de la resolución de forma adaptativa se tendrá una representación más exacta de los procesos atmosféricos, de la interacción entre estos, y se podrá apreciar mejor la presencia de fenómenos de escala pequeña.

Materiales y métodos

Sistema de ecuaciones escogido

En la atmósfera y el océano suelen ocurrir diversos tipos de movimientos cuya magnitud horizontal L es mucho mayor que la vertical D (OLIVEIRA, 2001). El sistema de ecuaciones escogido corresponde al del modelo de *aguas someras*, el cual describe, precisamente, este tipo de movimientos al igual que aspectos importantes de aquellos que no dependen de múltiples estratificaciones.

Para la obtención del sistema de ecuaciones se utilizó el método de las perturbaciones descrito en (HOLTON, 2004), que considera el estado básico (medio) independiente de la posición y el tiempo. Al sistema obtenido, considerando la aproximación geostrofica, se le

aplicó un análisis de escala para latitudes medias y se obtuvo un sistema como el descrito por Grotjahn y O'Brien en (GROTJAHN, 1976), pero con la diferencia que el parámetro de Coriolis fue tomado con aproximación del plano β , con el objetivo de incluir los cambios más importantes de los efectos de la rotación y, asimismo, motivados por la forma del sistema estudiado en la presente investigación. El resultado puede describirse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} Lu' - fv' + \frac{\partial \varphi'}{\partial x} &= 0 \\ Lv' + fu' + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} &= 0 \\ L\varphi' + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \\ f &= f_0 + \beta y f_0 = 2\Omega \sin \phi_0 \end{aligned}$$

es el parámetro de Coriolis considerando el efecto beta; $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ son las componentes del vector velocidad en las direcciones x e y respectivamente; g es la aceleración de la gravedad; h es la altura de la capa de fluido; $[\Phi(x, y, t), \phi(x, y, t)] = g \cdot h$ es el geopotencial; U, V y φ representan los estados medios de (u, v, h) y u', v', φ' representan las perturbaciones de (u, v, h) .

Aunque este modelo omite la información correspondiente a los movimientos verticales, procesos diabáticos y fricción, es capaz de representar mediante soluciones numéricas –como en este caso– algunos procesos dinámicos simplificados que no tienen dependencia directa de los procesos físicos verticales (DÍAZ, 2010). Además, por su simplicidad, es muy utilizado para mostrar el comportamiento de nuevos métodos numéricos, como el utilizado en esta investigación.

Discretización del sistema de ecuaciones

Las ecuaciones diferenciales que componen el modelo fueron discretizadas en una malla Arakawa A (MESINGER, 1976). El esquema en diferencias utilizado

fue Leap Frog –por ser el más recomendado en la bibliografía consultada (BOSCH, 2006) (KRISTOPHER, 2004) (MESINGER, 1976) (OLIVEIRA, 2001) en la resolución de problemas atmosféricos– para todos los pasos temporales, excepto el primero, donde se recurrió a un esquema en diferencias adelantadas. La utilización de estos esquemas numéricos en la solución de problemas meteorológicos está motivada por su sencillez y el bajo costo computacional asociado; además, la inestabilidad numérica que pueden generar se controla a partir del criterio CFL (KRISTOPHER, 2004). A partir de este momento, u' , v' y φ' se nombrarán como u , v y h , respectivamente.

Discretización (primer paso temporal):

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^k}{\Delta \tau} + U \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + V \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} - \\ -fv_{ij}^k + g \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{2\Delta x} &= 0 \\ \frac{v_{ij}^{k+1} + v_{ij}^k}{\Delta \tau} + U \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + V \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \\ + fu_{ij}^k + g \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{2\Delta y} &= 0 \\ \frac{h_{ij}^{k+1} + h_{ij}^k}{\Delta \tau} + U \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + V \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \\ + \Phi \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta x} + \Phi \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} &= 0 \end{aligned}$$

Discretización en los restantes pasos temporales:

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^{k-1}}{2\Delta \tau} + U \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + V \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} - \\ -fv_{ij}^k + g \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{2\Delta x} &= 0 \\ \frac{v_{ij}^{k+1} + v_{ij}^{k-1}}{2\Delta \tau} + U \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + V \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \\ + fu_{ij}^k + g \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{2\Delta y} &= 0 \\ \frac{h_{ij}^{k+1} + h_{ij}^{k-1}}{2\Delta \tau} + U \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + V \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \\ + \Phi \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + \Phi \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y} &= 0 \end{aligned}$$

donde: $\Delta \tau$ es el paso temporal, y Δx , Δy son los pasos espaciales en una y otra direcciones.

Método híbrido *Wavelet* con diferencias finitas

Con vistas a la integración de las ecuaciones del modelo se utilizó el método híbrido *Wavelet* con diferencias finitas, que es adaptativo. La figura 1 presenta los pasos para su aplicación.

1. Se inicializa el modelo: En esta etapa se preparan los campos iniciales de las variables que componen el modelo y de estas se elige una que sirve de patrón para crear la malla adaptativa A_j , cuyo nivel de refinamiento es $j = 0$, el cual se denota como el más grueso.
2. Mediante un esquema de descomposición quadtree (AUVIUR, 2006), la malla se divide en cuatro bloques y se convierte la rejilla tratada en la unión de cuatro nuevas rejillas; de modo que.

$A_j^{\lambda} B_j^{\lambda} A = \cup_j \cup_{\lambda} B_j^{\lambda}$ y es definido como bloque de de la forma siguiente:

$$B_j^{\lambda} = \{\mu = \lambda + (k\Delta_x^j, l\Delta_y^j), 0 \leq k \leq N^j, 0 \leq l \leq M^j\}$$

tal que $B_j^{\lambda} \subset A_j$ y λ es el punto extremo izquierdo superior a partir del cual se inicia el particionado.

3. Se aplica la transformada *Wavelet* discreta (TWD) a cada bloque:

$\forall B_j^{\lambda} \Rightarrow TWD$, cuya expresión es:

$$\sum_k s_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) = \sum_k s_k^0 \phi_k^0(x) + \sum_i \sum_k d_k^i \psi_j^k(x)$$

donde:

$\psi_j^k(x) \phi_k^0(x)$: función de escala; d_k^i : función *wavelet* y coeficiente de detalle.

A través de la TWD puede descomponerse una señal en un nivel de refinamiento dado (primer término) como la combinación de su aproximación gruesa (segundo término) más su representación en bases *wavelet* en un nivel de refinamiento anterior; precisamente, en este segundo término —como se mencionaba—, donde las bases son funciones *wavelet*, los coeficientes que las acompañan se denominan coeficientes de detalle. Estos representan la diferencia en

tre dos niveles de resolución consecutivos; por ello, pueden utilizarse como indicadores de las áreas en las cuales se desea refinar mediante la acotación de los mismos a umbrales que, por lo general, al igual que en la presente investigación, establece el autor.

4. $B_j^{\lambda} |d_{kl}^{(ij)}| > \epsilon$ Para cada bloque se comprueba si existe al menos un coeficiente que exceda el umbral escogido: . Entonces, a cada que cumpla con esta condición se le aplica el esquema de subdivisión interpolatoria propuesto por (DUBUC, 1990); de este modo, se genera en este bloque una malla con un nivel de resolución mayor.
5. $|d_{kl}^{(ij)}| > \epsilon \forall B_j^{\lambda}$ Se repite el proceso a partir del paso 2, o sea, se realiza nuevamente el proceso de particionado, pero que fueron refinados hasta que deje de cumplirse la condición de refinamiento, es decir, cuando: de este modo, se obtiene una malla fina en aquellos lugares donde se ha cumplido el criterio preestablecido, y gruesa en el resto del dominio.
6. $j = j_{\max} \forall B_j^{\lambda}$ Se integran las ecuaciones diferenciales del modelo en cada bloque de la malla adaptativa; esto es: se aplica localmente el método de diferencias finitas. Este proceso se realiza desde el máximo nivel de refinamiento hasta el más grueso $j = j_0$.
7. Para ir al siguiente paso temporal es necesario obtener una representación gruesa de la malla adaptativa hallada, lo cual se logra al aplicarle otra vez TWD a la malla adaptativa. Nuevamente, se repite el proceso a partir del paso 2, pero para la representación gruesa de la malla adaptativa obtenida. El algoritmo termina cuando se llega al tiempo de integración final.

Resultados y discusión

Elección de parámetros

Una primera etapa estuvo dada por la elección del grado del polinomio interpolador de la *wavelet* y el umbral ϵ que forma parte del criterio de refinamiento

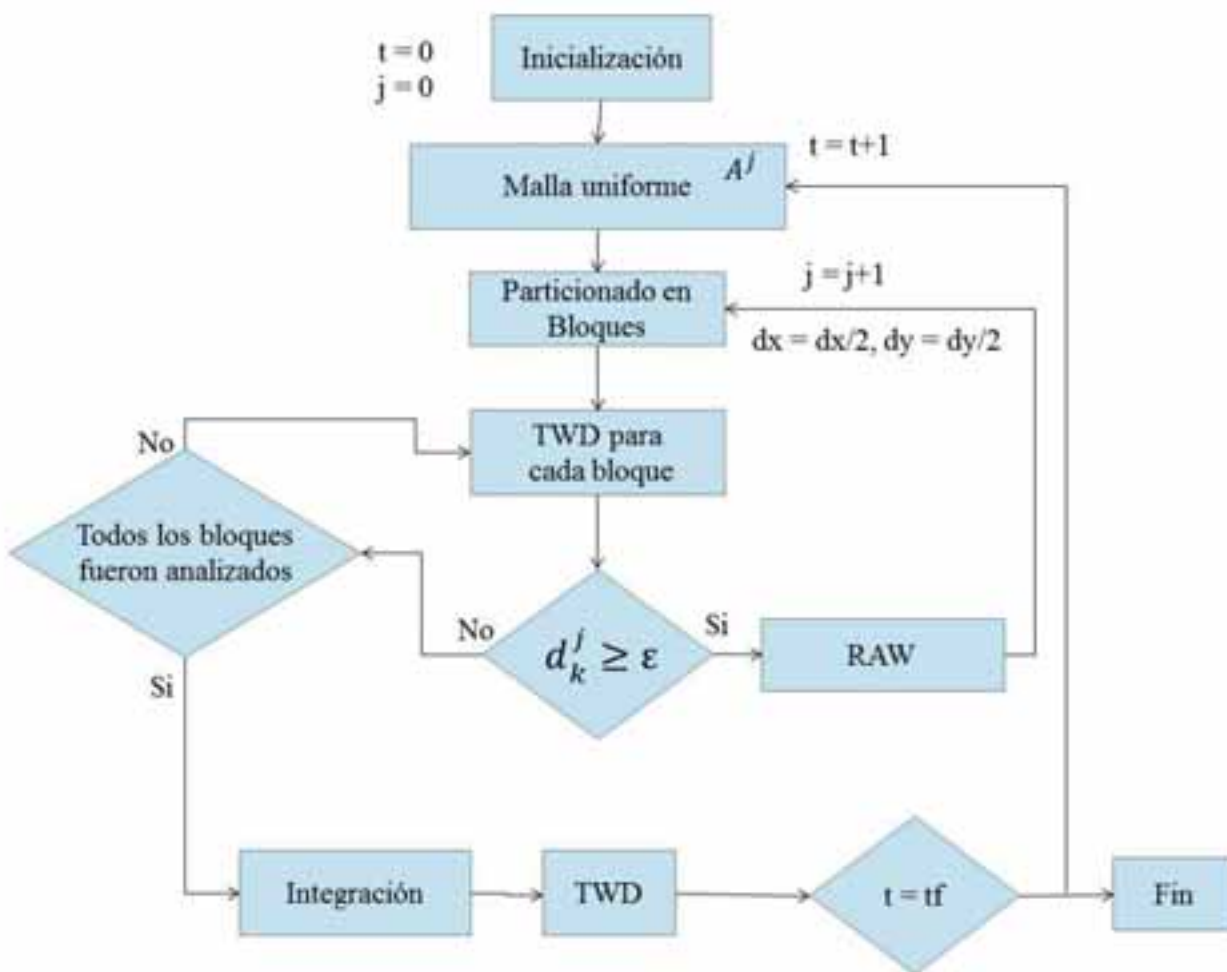


Fig. 1 Diagrama correspondiente al método híbrido.

to. Se realizaron varias pruebas para ambos parámetros, con el objetivo de encontrar una combinación que lograra un compromiso entre el número máximo de niveles de refinamiento y el tiempo de ejecución. Los resultados de estos experimentos se muestran en la tabla 1. Como se observa, a medida que aumenta el valor del grado del polinomio N , crece el número de puntos de la malla adaptativa; lo mismo sucede cuando se intenta disminuir el umbral: si este se hace muy pequeño, siempre se refina, por lo que es necesario acotar estos valores. De esta forma, se decidió utilizar $\epsilon = 10^{-1}$ y $N = 3$. Cuando los valores de los parámetros fueron distintos de los escogidos, el tiempo de ejecución aumentó considerablemente.

TABLA 1

Cantidad de nodos de la malla adaptativa, según el grado del polinomio N y el umbral

	10-1	10-2	10-3
3	34 848	56 627	56 628
5	37 432	37 432	62 426
7	41 382	69 696	69 696

Descripción del vórtice de velocidades barotrópicas

La figura 2 representa las componentes de la velocidad de un vórtice generado a partir de un campo de velocidades barotrópicas [18]. La magnitud de ambas componentes es del orden de 10^{-1} a 10^1 m/s; sobre el mismo no existe ninguna acción que lo fuerce en cuanto a dinámica, por lo cual se espera su desinte-

gración con el transcurso. La evolución del vórtice sin flujo constituye el primer caso de estudio de la presente investigación (Fig. 3a); luego se embebió el vórtice en un campo de velocidades con un valor de 20 m/s. Como se observa en la figura 3b, el vórtice se mueve en sentido contrario al movimiento del flujo, por lo que es de esperar una desintegración mucho más rápida que en el caso anterior. Por último (Fig. 3c), se añadió un flujo de -20 m/s; aquí, el flujo y el vórtice se mueven en el mismo sentido y, por ello, se espera que se mueva más rápido. En los tres estadios descritos, el vórtice constituyó las condiciones iniciales del modelo, mientras que las condiciones de frontera asumidas en todos los casos fueron de tipo reflexivas [18]. Es importante destacar que en las pruebas realizadas al método adaptativo se tomó la

componente horizontal del viento u como variable de referencia para la aplicación del RAW. En esta decisión se tuvieron en cuenta las características de las condiciones con las que se inicializaría el modelo: $h = 0$ y componentes horizontales de la velocidad = vórtice de velocidades barotrópicas. Pero, al ser los valores de la componente u de la velocidad en el vórtice de un orden mayor que los de la componente v , finalmente, se decidió escoger esta por considerarse la que más aporta a la estructura y evolución del mismo.

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a la integración de la ecuaciones linealizadas del modelo de aguas someras, con efecto beta, inicializadas con el vórtice de velocidades barotrópicas en los diferentes estados descritos. La integración se realiza por el método adaptativo propuesto y

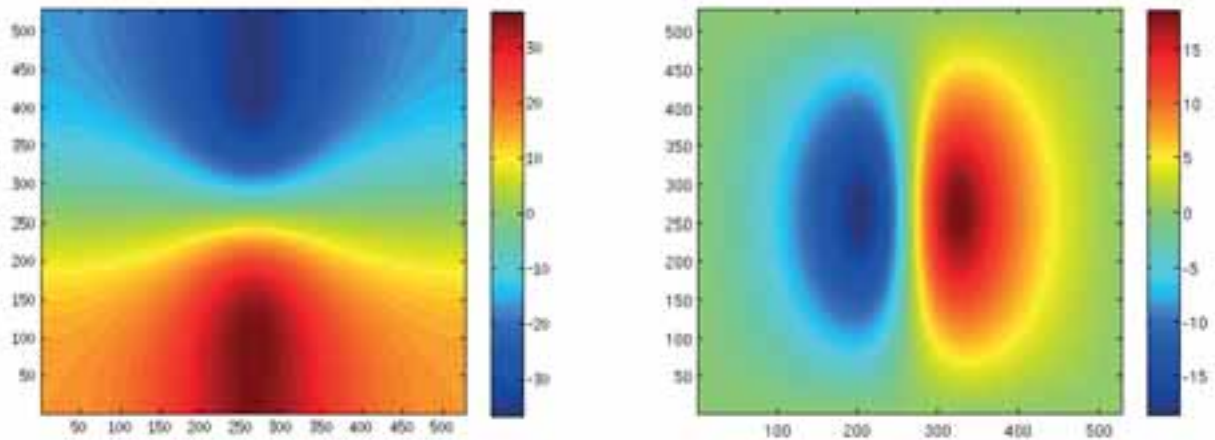


Fig. 2 Campo de velocidad utilizado para la inicialización del modelo: a) componente u de velocidad y b) componente v de velocidad.

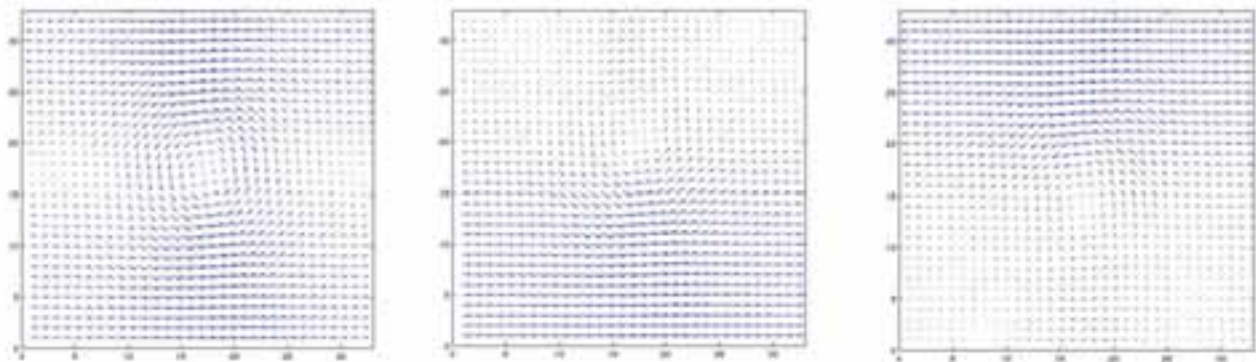


Fig. 3 Vector velocidad del viento: a) sin flujo; b) flujo positivo y c) flujo negativo.

por el método de diferencias finitas uniforme, ambos sobre los esquemas en diferencias establecidos en la sección anterior. En cada caso, para la integración del método uniforme, las mallas se construyeron con los pasos espaciales y temporales correspondientes al máximo nivel de refinamiento de la malla adaptativa. En todos los casos, la variable mostrada es la componente zonal del viento debido a dos razones: esta fue la variable ecogida como patrón para el refinamiento adaptativo con *wavelet* y con el objetivo de mostrar la evolución del vórtice en el tiempo para los diferentes casos propuestos. Con miras a la visualización de las mallas adaptativas se tuvieron en cuenta los aspectos planteados en [29].

Vórtice sin flujo

En la figura 4 se observa cómo el movimiento de la componente u de la velocidad es lento en la malla adaptativa y rápido en la malla uniforme; este comportamiento se atribuye a la pérdida de estabilidad numérica en el método uniforme, hecho que se justifica con el incremento desproporcionado del orden de magnitud en la variable mostrada a partir del vigésimo paso temporal. No obstante, el movimiento en ambos tipos de rejillas se comporta según lo esperado y, de esta forma, presenta una deriva pequeña hacia arriba por el efecto beta considerado en las ecuaciones; además, con el paso del tiempo, el sistema tiende a desaparecer dada la ausencia de forzamiento dinámico en el sistema.

En la tabla 2 se observa que la cantidad de puntos de la malla adaptativa es un orden menor que la de la malla original. Vale precisar que en esta tabla y en las siguientes, la comparación mostrada se realiza entre la cantidad de puntos de la malla original y la cantidad de puntos de una de las mallas adaptativas, en un dt específico. A pesar de que las rejillas pueden variar su forma en el tiempo, las relaciones presentadas son independientes de este, es decir, no varían.

TABLA 2

Cantidad de puntos de cada malla

ε	N]	Malla adaptativa	Malla uniforme
10-1	3	3	34 848	278 784

Vórtice embebido en un flujo negativo

En la figura 5, el vórtice y el flujo se mueven en la misma dirección, y el comportamiento es similar al del ejemplo anterior, solo que el movimiento es un poco más rápido; aunque, en esta ocasión, la cantidad de puntos de la malla adaptativa es superior (Tabla 3), esta sigue siendo un orden de magnitud menor con respecto a la rejilla original.

TABLA 3

Cantidad de puntos de cada malla

ε	N]	Malla adaptativa	Malla uniforme
10-1	3	3	52 272	278 784

Vórtice embebido en un flujo positivo

La figura 6 muestra la sensibilidad del vórtice al cambiarse el sentido del flujo. Se observa una disipación mucho más rápida de este cuando se utiliza el método de diferencias finitas uniforme. El cambio de la variable en la malla adaptativa sigue siendo casi imperceptible para el paso temporal estudiado.

En este caso (Tabla 4), la cantidad de puntos de la malla adaptativa es la menor de las presentadas. En todos los experimentos realizados el número de puntos de la malla uniforme fue siempre mayor que el número de puntos de la malla adaptativa para una iteración dada.

TABLA 4

Cantidad de puntos de cada malla

ε	N]	Malla adaptativa	Malla uniforme
10-1	3	3	17 424	278 784

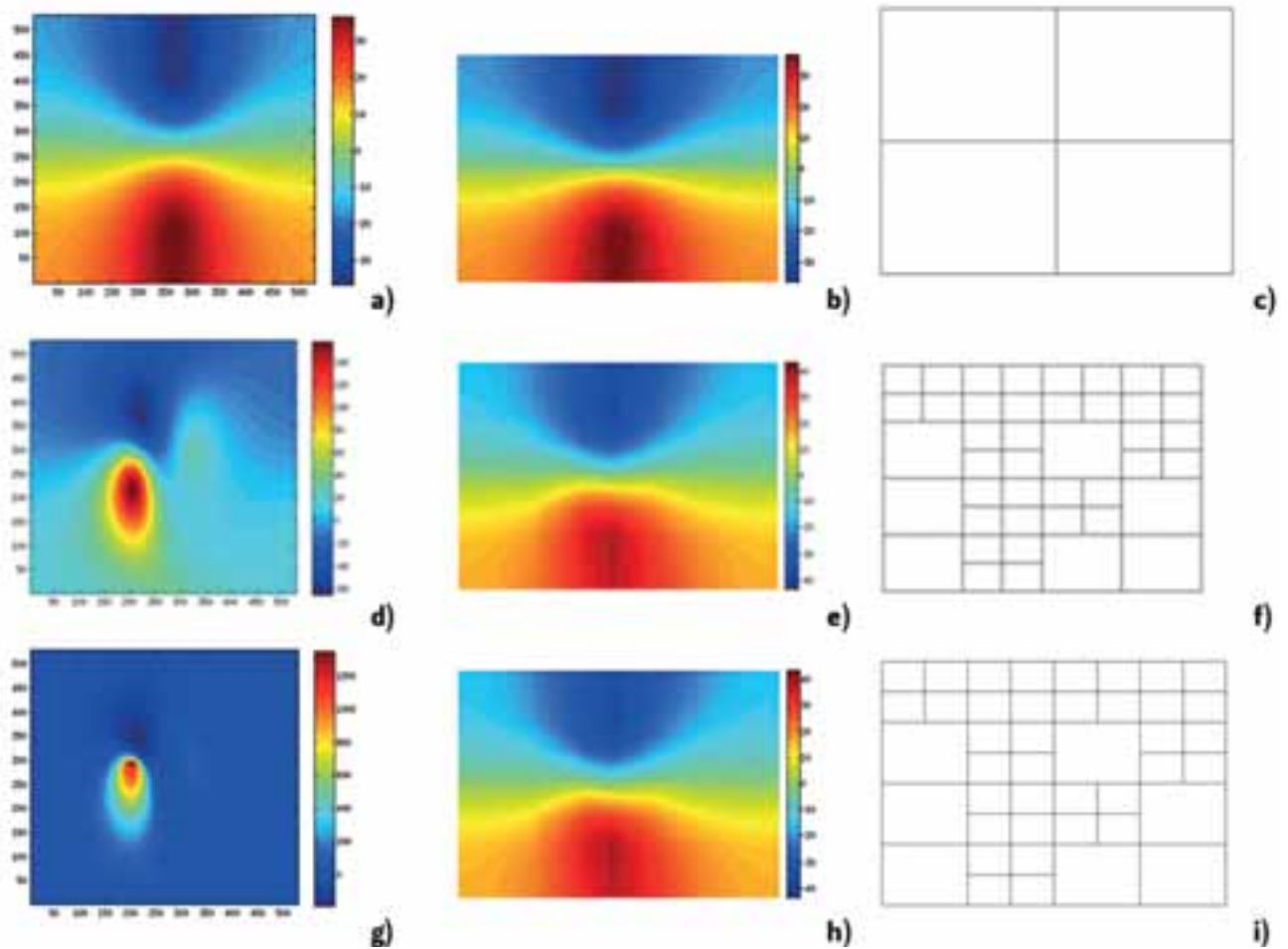


Fig. 4 Componente u . Caso sin flujo: a) malla uniforme $t = 100$ s; b) malla adaptativa $t = 100$ s; c) forma de la malla adaptativa $t = 100$ s; d) malla uniforme $t = 1\,200$ s; e) malla adaptativa $t = 1\,200$ s; f) forma de la malla adaptativa $t = 1\,200$ s; g) malla uniforme $t = 2\,400$ s; h) malla adaptativa $t = 2\,400$ s e i) forma de la malla adaptativa $t = 2\,400$ s.

Paso temporal

Los cambios mostrados hasta el momento en la evolución de la variable de estudio para el método adaptativo son suaves, lo cual dificulta observar su evolución e indica que es posible aumentar, en este caso, el paso temporal de integración de las ecuaciones. Por tanto, con el objetivo de observar qué tanto se logra aumentar el paso temporal sin que influya en la estabilidad del método y que pudiera observarse la evolución de la variable, se realizaron diversas pruebas. Las mostradas en la figura 7 corresponden a parte de las corridas para un $\Delta t = 420$ s con el método adaptativo y para $\Delta t = 100$ s con el método original, en el vórtice sin flujo.

Como puede observarse, es posible obtener patrones semejantes en menos iteraciones y con un paso mayor para el caso adaptativo, reiterando esto sus ventajas en cuanto a tiempo de ejecución del modelo.

Para todos los casos simulados, se evidencia que la utilización del método de diferencias finitas uniforme sobre mallas muy finas atenta contra la estabilidad numérica del problema que se resuelve. Los valores de las variables modeladas, en este caso, aumentan su magnitud desproporcionadamente con el transcurso, lo cual carece de todo sentido físico.

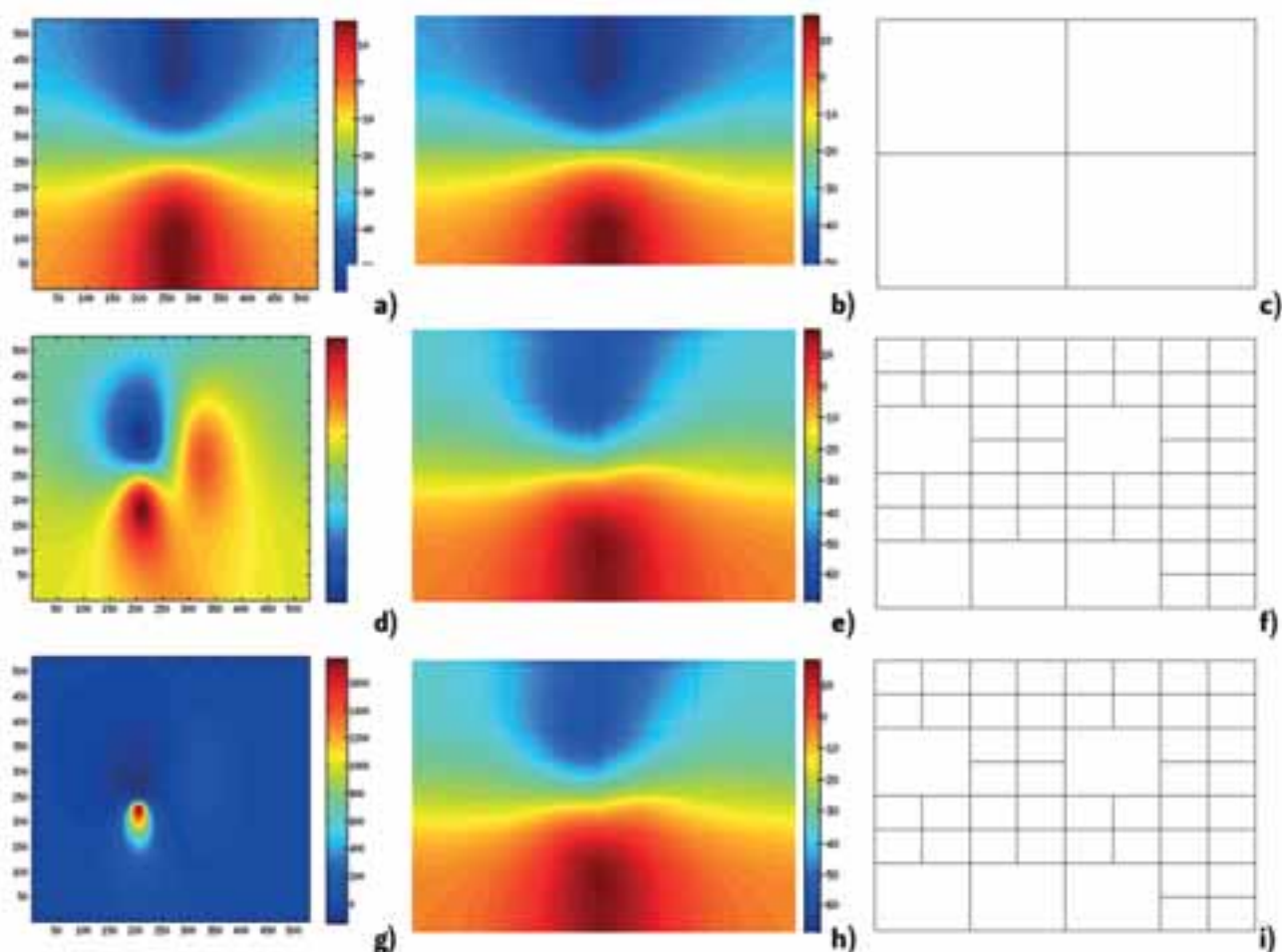


Fig. 5 Componente u . Caso flujo negativo: a) malla uniforme $t = 100$ s; b) malla adaptativa $t = 100$ s; c) forma de la malla adaptativa $t = 100$ s; d) malla uniforme $t = 1200$ s; e) malla adaptativa $t = 1200$ s; f) forma de la malla adaptativa $t = 1200$ s; g) malla uniforme $t = 2400$ s; h) malla adaptativa $t = 2400$ s e i) forma de la malla adaptativa $t = 2400$ s.

Evolución en el tiempo de la malla adaptativa

En esta ocasión, se muestra una parte de las corridas realizadas para el método adaptativo cada 360 s en el vórtice embebido en un flujo positivo. La figura 8 evidencia la capacidad del método adaptativo presentado para seguir en el tiempo las zonas de interés. Después de una primera integración, la forma de la malla adaptativa presenta solo un nivel de refinamiento y el comportamiento del campo es suave. En la siguiente, se observa que la malla ha adquirido una distribución en la cual todos los bloques poseen dos o tres niveles de refinamiento. En la quinta iteración, algunas de las mallas con máximo nivel de refinamiento han sido removidas. La evolución en el tiempo

de la malla adaptativa es descrita también por [17]. Otro aspecto destacable es cómo, al igual que en el ejemplo de la sección anterior, a pesar del aumento del paso temporal, los valores de las variables no varían bruscamente el orden de magnitud de una iteración a otra, como sucede para el caso del método uniforme, lo que reafirma la estabilidad del método híbrido.

Conclusiones

Mediante el método adaptativo propuesto se logró simular el comportamiento de un vórtice de velocidades barotrópicas, así como su reacción ante

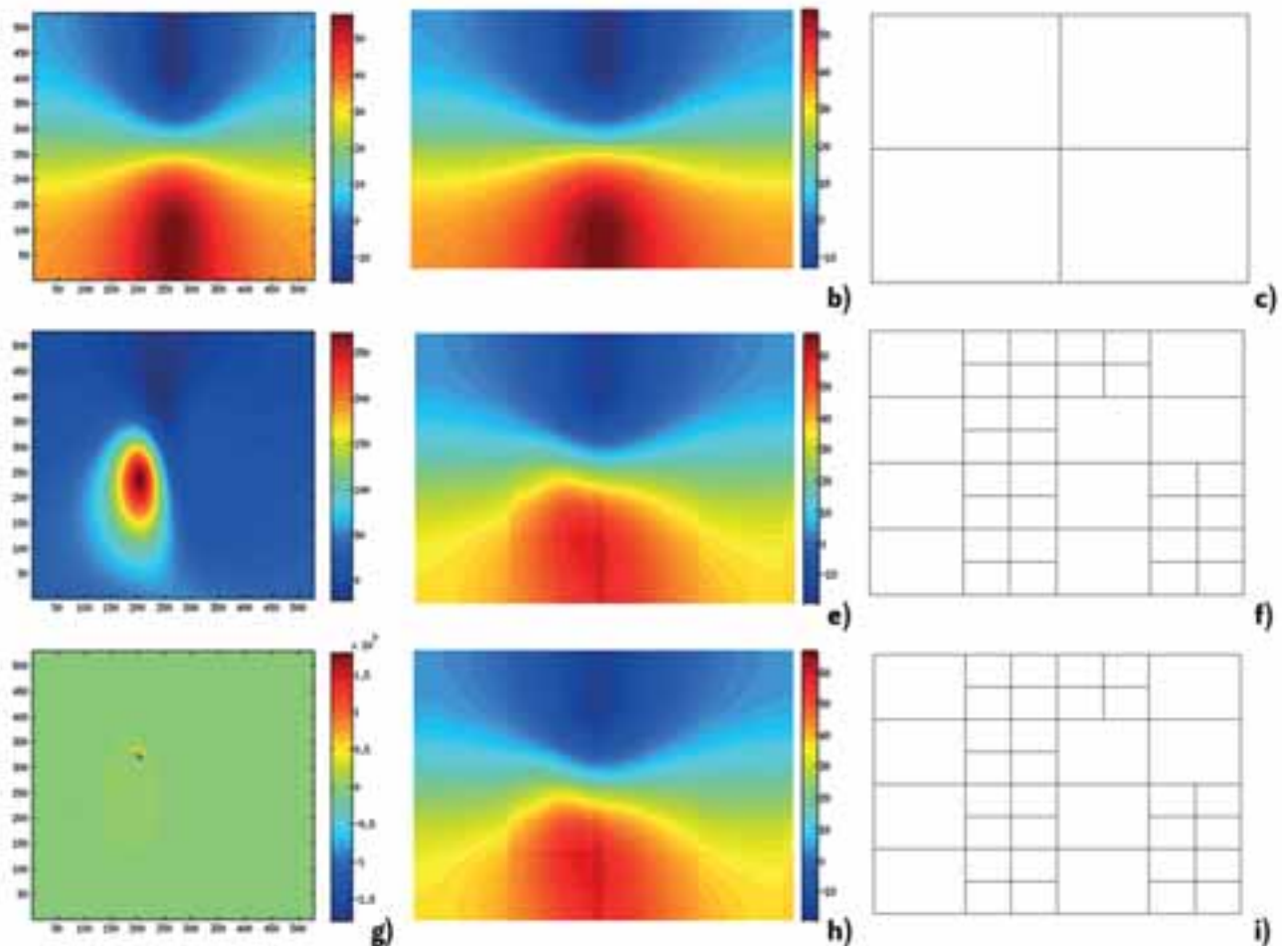


Fig. 6 Componente u . Caso flujo positivo: a) malla uniforme $t = 100$ s; b) malla adaptativa $t = 100$ s; c) forma de la malla adaptativa $t = 100$ s; d) malla uniforme $t = 1200$ s; e) malla adaptativa $t = 1200$ s; f) forma de la malla adaptativa $t = 1200$ s; g) malla uniforme $t = 2400$ s; h) malla adaptativa $t = 2400$ s e i) forma de la malla adaptativa $t = 2400$ s.

la presencia de un campo de velocidades en diferentes direcciones. Este comportamiento estuvo en correspondencia con lo esperado desde el punto de vista de la dinámica del proceso; de este modo, es posible observar en todos los casos una deriva ligera hacia arriba, como consecuencia de las consideraciones asumidas en las ecuaciones modeladas (f positiva y efecto beta).

Los resultados evidencian, además, las ventajas numéricas de utilizar un método adaptativo en la simulación de sistemas complejos donde los cambios en las variables modeladas sean bruscos. En los casos analizados se logró que la cantidad de puntos de la malla adaptativa obtenida fuera de un orden de mag-

nitud menor que la cantidad de puntos de su correspondiente malla uniforme; asimismo, fue posible la integración de las ecuaciones con un paso temporal mayor, lo cual posibilita la disminución del tiempo de ejecución del modelo.

Se comprobó la capacidad del método híbrido *Wavelet* con diferencias finitas para representar diferentes escalas en una malla; los coeficientes *wavelet* reflejaron bien las irregularidades, por lo cual pueden utilizarse como criterio para el refinamiento adaptativo. De este modo, con la construcción de mallas adaptativas y el consecuente aumento de la resolución en las áreas de interés, pudo disminuirse también el espacio en memoria utilizado.

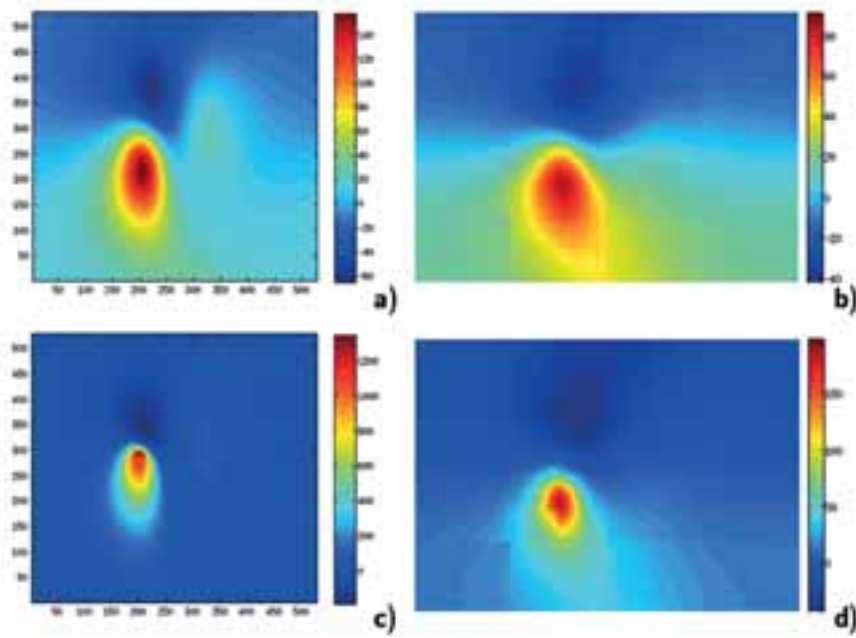


Fig. 7 Malla adaptativa (b y d) en comparación con la malla uniforme (a y c). Componente u: a) $dt = 100$ s, iteración = 12; b) $dt = 420$ s, iteración = 5; c) $dt = 100$ s, iteración = 24 y d) $dt = 420$ s, iteración = 9.

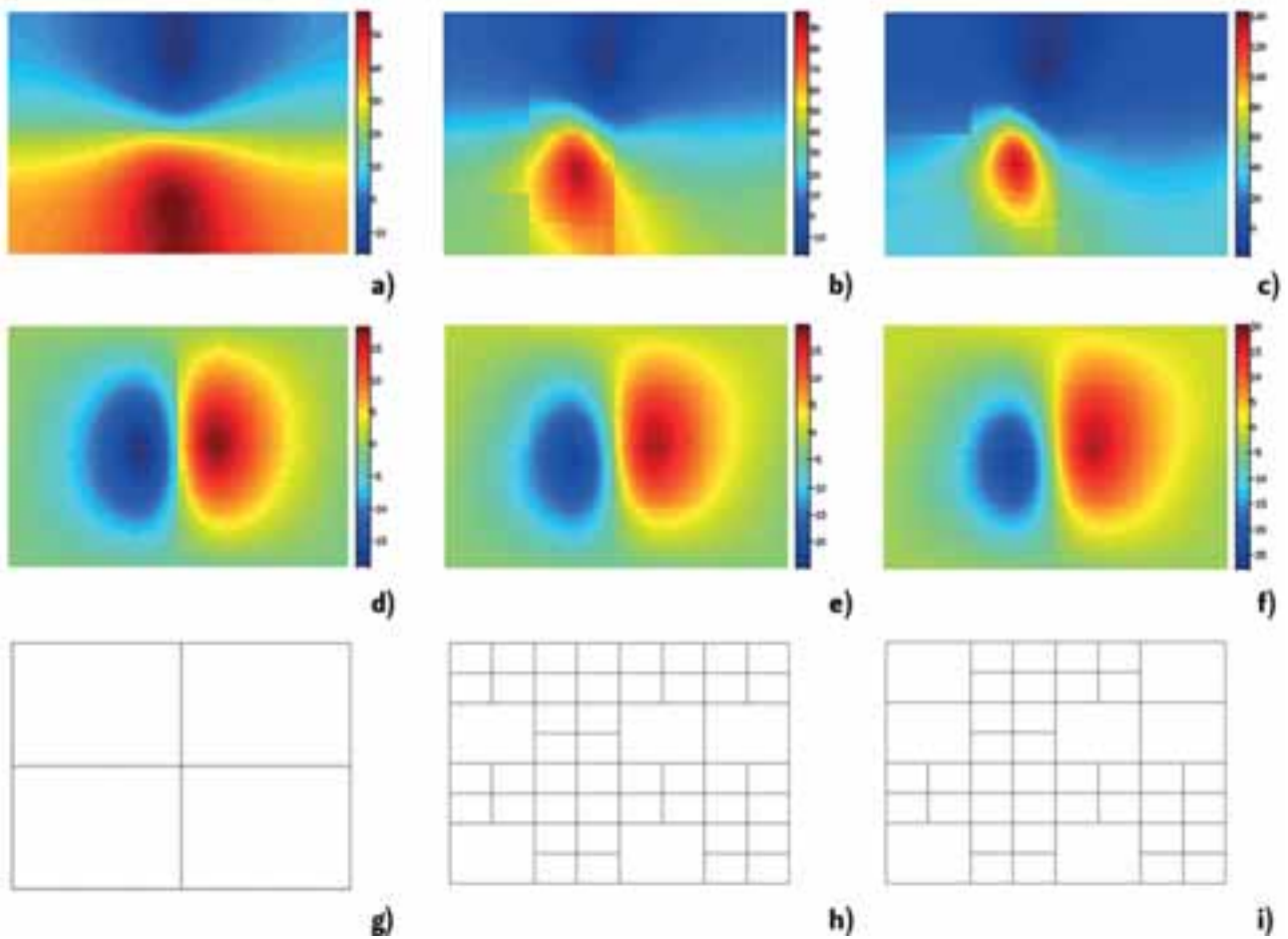


Fig. 8 Evolución de las componentes u y v con el tiempo para $dt = 360$ s: a) u: $t = 360$ s; b) u: $t = 720$ s; c) u: $t = 1800$ s; d) v: $t = 360$ s; e) v: $t = 720$ s; f) v: $t = 1800$ s; g) forma de la malla: $t = 360$ s; h) forma de la malla: $t = 720$ s e i) forma de la malla: $t = 1800$ s.

Referencias bibliográficas

- ÁLVAREZ L., MORANTE R & RUIZ, A. “The interpolatory wavelet for the numerical solution of the Schrödinger equation”, *Revista Investigación operacional*, 22:184-192, 2001.
- AUVIUR, N. Adaptive Mesh Refinement for a finite difference scheme using a Quadtree decomposition approach, 2006.
- BERGER, M & OLIGER, J. “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53:484-512, 1984.
- BERGER, M & COLELLA, L. “Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics* 82, 64-84, 1989.
- BERGER, M.J., GEORGE, D.L & LEVEQUE, R.J. “Using Adaptive Mesh Refinement to Model Ocean Flow”, aug. 2010.
- BOSCH, J. Métodos Finitos, 2006.
- COLELLA, P., GRAVES, D. T & Keen N. D. “Chombo Software Package for AMR Applications”, *Design Document*, 2009.
- CHRISOCHOIDES, N., DROEGEMEIER, K., FOX, G., MILLS K & XUE M. A methodology for developing high performance computing models: Storm-Scale weather prediction, 1993.
- DEBREU, L & BLAYO, E. “Adaptive mesh refinement for finite-difference ocean models: First experiments”, *American Meteorological Society*, 29:1239-1250, 2008.
- DEBREU, L., VOULAND, C & BLAYO, E. “AGRIF: Adaptive grid refinement in FORTRAN”, *Rapport technique 0262*, juin 2002.
- DEBREU, L., VOULAND, C & BLAYO, E. “AGRIF: Adaptive Grid Refinement in FORTRAN”, *Computer and Geosciences*, 34:8-13, 2008.
- DÍAZ, O. “Notas de meteorología dinámica”, ago. 2010.
- DEITERDING, R. Block-structured Adaptive Mesh Refinement Methods for Conservation Laws Theory, Implementation and Application, 2008.
- DOMINGUES, M. O., ROUSSEL, O & SCHNEIDER, K. “An adaptive multiresolution method for parabolic PDEs with time-step control”, *Meth. Engng*, 78:652-670, 2009.
- DUBUC, S & DESLAURIERS, G. Symmetric iterative interpolation processes, 1989.
- GROTJAHN, R & O'BRIEN, J. “A thermodynamically general theory for convective vortices”, *Monthly Weather Review*, 104:180-194, 1976.
- HOLSTRÖM, M. “Wavelet based methods for time dependent pdes”, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 134:551-561, 1999.
- HOLTON, J. An introduction to dynamic meteorology, Elsevier Academic Press, 2004.
- HYMAN, J. M & LI, S. An Adaptive Moving Mesh Method with Locally Refined Nested Grids for Partial Differential Equations, sep. 2014.
- JABLONOWSKI, C. Adaptive Grids in weather and climate modeling, 2004.
- JABLONOWSKI, C., HERZOG, M & PENNER, J. “Block-Structured Adaptive Grids on the Sphere: Advection Experiments”, *Mon. Wea. Rev.*, dic. 2006.
- KRISTOPHER, K. Numerical Methods in Meteorology and Oceanography, 2004.
- MESINGER, M & ARAKAWA, A. “Numerical Methods used in Atmospheric Models”, *J. Atmos. Sci.*, 17, aug. 1976.
- OLIVEIRA, M. Análisis wavelet en la simulación numérica de ecuaciones en derivadas parciales con adaptabilidad espacial, 2001.
- RIDDAWAY, R.W. Numerical Methods, 2001.
- SIERRA, M. Wavelets en refinamiento de rejillas y detección de rollos convectivos horizontales, 2011.
- SKAMAROCK, W., OLIGER, J & STREET, R. “Adaptive grid refinement for numerical weather prediction”, *Journal of Computational Physics*, 80:27-60, 1989.
- SKAMAROCK, W & KLEMP, J. “Adaptive Grid Refinement for Two-Dimensional and Three-Dimensional NonHydrostatic Atmospheric Flow”, *Monthly Weather Review*, 121, 1992.
- WEBER, G., BECKNER, V & CHILDS, H. Visualization Tools for Adaptive Mesh Refinement Data, 2008.
- XUE, Q. Development of Adaptive Mesh Refinement Scheme and Conjugate Heat Transfer Model for Engine Simulations, 2009.